

УДК 524.386

## АНАЛИЗ КРИВЫХ БЛЕСКА ЗАТМЕННЫХ СИСТЕМ С ЭКЗОПЛАНЕТАМИ. СИСТЕМА HD 189733

© 2011 г. М. К. Абубекеров\*, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук

*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга  
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20.05.2011 г.; принята в печать 15.06.2011 г.

Выполнен анализ высокоточных многоцветных кривых блеска двойной системы с экзопланетой HD 189733. Получены значения радиуса звезды, радиуса планеты, наклона орбиты двойной. Получены значения коэффициентов потемнения диска звезды к краю в 10 фильтрах в диапазоне  $\lambda\lambda = 5500\text{--}10\,500 \text{ \AA}$ . Оценки ошибок искоемых параметров выполнены методом дифференциальных поправок и методом доверительных областей. Выполнено сравнение зависимости коэффициентов потемнения диска звезды к краю от длины волны с соответствующей теоретической зависимостью, следующей из моделей тонких звездных атмосфер. Подтверждается зависимость (на уровне  $1\sigma$ ) радиуса экзопланеты от длины волны, обнаруженная Понтом и др. Радиус экзопланеты возрастает с уменьшением длины волны, что, по-видимому, является свидетельством наличия атмосферы у планеты.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] выполнена интерпретация высокоточных многоцветных кривых блеска звезды HD 209458, затмеваемой экзопланетой. Показано, что даже при использовании наиболее консервативных оценок “внешних” ошибок параметров модели остается значимое отклонение наблюдаемых коэффициентов потемнения диска звезды к краю от теоретических [2, 3]. Тем самым подтверждено расхождение между наблюдениями и теорией для тонких звездных атмосфер, обнаруженное в работе [4]. Для дальнейшего исследования этого эффекта важно проанализировать потемнение к краю по дискам других звезд, затмеваемых экзопланетами. В работе [5, 6] получены высокоточные многоцветные кривые блеска звезды HD 189733, затмеваемой экзопланетой, исследована пятнистая структура звездного диска, а также заподозрено наличие атмосферы у экзопланеты. Цель нашей работы — детально исследовать зависимость потемнения диска звезды к краю от длины волны в затменной системе HD 189733, основываясь на данных работы [5].

В нашем исследовании, мы, как и в работе [1], детально проанализировали влияние ошибок параметров, найденных разными методами, на результаты интерпретации затменных кривых блеска.

### 2. МЕТОД ИНТЕРПРЕТАЦИИ

Метод интерпретации наблюдаемых транзитных кривых блеска двойных затменных систем с экзопланетами подробно изложен в работе [1]. Поэтому здесь мы опишем лишь главные идеи метода.

Используется модель двух сферических звезд на круговой орбите в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Пятна на поверхности звезды отсутствуют. При массе звезды и планеты  $m_s = 0.825M_\odot$  и  $m_p = 1.15M_{Jup}$ , соответственно [7], средний относительный радиус полости Роша для планеты, рассчитанный с помощью формулы Эгглтона [8], составляет  $R_R/a = 0.0531$ , где  $a$  — радиус относительной орбиты системы. Поскольку относительный радиус планеты  $r_p = R_p/a \simeq 0.0175$  (см. ниже), степень заполнения планетой своей полости Роша  $\mu_p \simeq 0.33$ , что значительно меньше 0.5. Поэтому сферическое приближение для планеты является вполне удовлетворительным (если пренебречь сплюснутостью планеты, обусловленной ее осевым вращением). То же самое можно сказать и об оптической звезде. С другой стороны, как отмечается в [1], в оптическом диапазоне спектра амплитуда изменений блеска, обусловленных эффектом отражения, должна составлять, в фазах затмения, менее  $10^{-5}$  зв. вел., что пренебрежимо мало. В работе [6] была заподозрена слабая зависимость радиуса экзопланеты в системе HD 189733 от длины волны, что может свидетельствовать о наличии атмосферы у экзопланеты. Рефракция света звезды в атмосфере экзопланеты

\*E-mail: marat.abubekеров@gmail.com

может приводить к искажению кривой блеска при затмении звезды планетой. Эффекты рефракции света в затменных двойных системах были рассчитаны в работе Кудзея [9]. Эти эффекты должны приводить к наличию небольших горбиков (поярчаний) на кривой блеска перед затмением и после затмения, а также в середине затмения. Поскольку такие горбики на кривых блеска HD189733 не наблюдаются, можно предполагать, что влияние эффектов рефракции на кривые блеска системы HD 189733 пренебрежимо мало.

В работе [10] исследовано влияние эффектов гравитационного микролинзирования на кривую блеска при затмении звезды экзопланетой. Показано, что эффекты микролинзирования существенны лишь для звезд, размеры орбит экзопланет которых превышают 10 а.е. (соответствующее значение орбитального периода  $P > 10$  лет). Таким образом, наша модель двух сферических компонент вполне применима к анализу кривых блеска системы HD 189733.

При расчете кривой блеска в качестве функции распределения яркости по диску звезды использовались линейный и квадратичный законы потемнения к краю:

$$I(\rho) = I_0 \left( 1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right) \quad (1)$$

и

$$I(\rho) = I_0 \left[ 1 - x \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right) - y \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_s^2}} \right)^2 \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\rho$  — полярное расстояние от центра диска звезды,  $I_0$  — яркость в центре диска,  $r_s$  — радиус диска звезды, выраженный в долях радиуса относительной орбиты,  $x$  — коэффициент потемнения к краю. Яркость в центре диска планеты и соответственно яркость в любой точке ее диска предполагается равной нулю. Планета затмевает звезду в диапазоне орбитальных фазовых углов  $\theta = \pi$ . Орбита считается круговой, радиус относительной орбиты  $a$  предполагается равным единице. “Третий свет” в модели отсутствует. Радиус планеты, выраженный в долях радиуса относительной орбиты, обозначается как  $r_p$ . В нашей модели искомыми параметрами модели являются: радиус звезды  $r_s$ , радиус планеты  $r_p$ , угол наклона орбиты к картинной плоскости  $i$ , коэффициент потемнения к краю  $x$ , а в случае квадратичного закона потемнения к краю также и коэффициент  $y$ .

Полный блеск системы предполагается равным единице. Наблюдаемые значения блеска предполагаются распределенными по нормальному закону. Стандартные отклонения наблюдаемых значений блеска  $\sigma$  также предполагаются известными.

Для поиска оптимальных (центральных) значений параметров модели и для построения доверительной области для них используется невязка, представляющая собой сумму квадратов разностей между наблюдаемыми значениями блеска и теоретическими значениями (зависящими от искоемых параметров), деленных на дисперсии наблюдаемых значений блеска (квадраты стандартных отклонений  $\sigma$ ). Если используемая модель адекватна наблюдательным данным, то при точных значениях искоемых параметров эта невязка распределена по закону  $\chi_M^2$ , где  $M$  — число точек наблюдения. Эта невязка (являющаяся выпуклой функцией от искоемых параметров) достигает своего минимума при определенных значениях искоемых параметров  $r_s^c$ ,  $r_p^c$ ,  $i^c$ ,  $x^c$ ,  $y^c$ , которые называются центральными (или оптимальными). Когда используемая модель адекватна наблюдаемым данным, то центральные значения параметров распределены по закону, который в некоторой окрестности их средних значений можно считать нормальным, если пренебречь в этой окрестности нелинейностью в зависимости блеска от искоемых параметров. Это можно сделать в случае достаточно малых значений  $\sigma$  и большого числа точек наблюдения  $M$ .

Центральные значения искоемых параметров являются случайными величинами и в указанном приближении распределены по нормальному закону. Они могут использоваться в качестве статистики в методе дифференциальных поправок или методе Монте-Карло (который в известном смысле эквивалентен методу дифференциальных поправок [11, 12]). За интервалы ошибок параметров в данном случае берутся интервалы, центр которых совпадает с центральным значением соответствующего параметра, а полуширина равна среднеквадратичной оценке стандартного отклонения  $\sigma_{est}$  текущего значения параметра от его центрального значения, умноженной на коэффициент, соответствующий выбранному уровню доверия  $\gamma$  (критерий  $1\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$  и т.п.) [12]. В этом случае предполагается, что используемая модель идеально верна, и в случае более чем одного искомого параметра для каждого отдельного параметра получается отдельный доверительный интервал, в котором истинное значение этого параметра содержится с заданной вероятностью  $\gamma$  (независимо от попадания истинных значений других искоемых параметров в их доверительные интервалы). Также предполагается, что можно пренебречь нелинейностью зависимости функции блеска от искоемых параметров в окрестности центральных значений с диаметром порядка

стандартного отклонения. При этом вероятность совместного попадания истинных значений всех искомых параметров во все доверительные интервалы одновременно меньше заданного уровня доверия  $\gamma$  (в 1.2–1.5 раза, как показывают численные эксперименты для случая затменных систем [11]). Поскольку в методе дифференциальных поправок (или методе Монте-Карло) используется статистика нормального распределения найденных центральных значений искомых параметров при жестком априорном предположении об идеальной верности модели и поскольку при этом не используется информация о дисперсии наблюдаемых значений блеска (при этом для построения доверительных интервалов берутся не дисперсии центральных значений искомых параметров, а их среднеквадратичные оценки  $\sigma_{est}^2$ ), ошибки искомых параметров, найденные методом дифференциальных поправок (или методом Монте-Карло) являются “внутренними”. Они, как правило, получаются сильно заниженными. Как показано в работе Поппера [13], это занижение в случае затменных систем может достигать 3–5 раз.

В связи со сказанным мы в нашей работе использовали для оценки ошибок параметров, помимо метода дифференциальных поправок, также метод доверительных областей [14]. Достоинством этого метода является то, что получаемые при этом доверительные интервалы для параметров гарантируют одновременное попадание точных значений всех искомых параметров в соответствующую доверительную область (в многомерном пространстве параметров) с заданной вероятностью  $\gamma$ . При этом вероятность попадания точного значения отдельного параметра в соответствующий доверительный интервал больше заданной вероятности  $\gamma$ . Кроме того, в данном случае больше  $\gamma$  и вероятность накрытия точного решения (совокупности всех искомых параметров) всеми доверительными интервалами одновременно, поскольку объем соответствующего параллелепипеда, куда вписана доверительная область  $D$ , больше, чем объем этой области.

Таким образом, метод доверительных областей позволяет получать более консервативные “внешние” оценки ошибок искомых параметров, которые в несколько раз превосходят оценки ошибок, найденные методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло.

Для нахождения доверительной области  $D$  мы будем использовать либо статистику с законом распределения  $\chi_P^2$ , либо статистику с законом распределения  $\chi_M^2$  [11, 12]. В качестве статистики, распределенной по закону  $\chi_P^2$  (где  $P$  — число искомых параметров задачи), используется разность между вышеупомянутой невязкой, распределенной

по закону  $\chi_M^2$  ( $M$  — число точек наблюдения), и ее минимальным значением (которое достигается при центральных значениях искомых параметров). Если пренебречь нелинейностью зависимости блеска от искомых параметров (это можно сделать в случае достаточно большого числа точек наблюдения  $M$ ), то эту разность при точных значениях искомых параметров можно считать распределенной по закону  $\chi_P^2$ , где  $P = 4$  в нашей модели с линейным законом потемнения к краю и  $P = 5$  для модели с квадратичным законом потемнения к краю.

При использовании статистик, распределенных по закону  $\chi_M^2$  или  $\chi_P^2$ , доверительной областью  $D$  считается многомерное множество в пространстве искомых параметров, для которого указанные статистики меньше квантиля, соответствующего заданному уровню доверия  $\gamma$ . Тогда вероятность содержания совокупности точных значений параметров в  $D$  равна  $\gamma$ . При этом в качестве доверительных интервалов (ошибок) для параметров, соответствующих выбранному уровню доверия  $\gamma$ , берутся проекции сторон  $P$ -мерного параллелепипеда (в который вписана доверительная область  $D$ ) на координатные оси в пространстве искомых параметров [11]. При таком способе построения доверительных интервалов, как уже отмечалось выше, гарантируется одновременное попадание в них точных значений всех искомых параметров с вероятностью, не меньшей заданной вероятности  $\gamma$ . Таким образом, указывая значения доверительных интервалов (ошибок) для искомых параметров задачи, мы должны помнить, что в случае метода дифференциальных поправок (или метода Монте-Карло) принятый уровень доверия  $\gamma$  равен вероятности накрытия точного значения каждого из фиксированных параметров соответствующим доверительным интервалом; при этом вероятности накрытия точного решения всеми доверительными интервалами одновременно меньше  $\gamma$ . В случае же метода доверительных областей вероятность накрытия точного значения фиксированного параметра каждым доверительным интервалом в отдельности больше принятого уровня доверия  $\gamma$ , но при этом вероятность совместного накрытия точных значений всех параметров доверительной областью  $D$  равна  $\gamma$ . Таким образом, в методе дифференциальных поправок и в методе Монте-Карло выбранный уровень доверия  $\gamma$  относится к каждому из доверительных интервалов в отдельности, а в методе доверительных областей — ко всей доверительной области  $D$ .

Как и в случае метода дифференциальных поправок, использование статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  предполагает, что модель идеально верна, и при этом получаемая асимптотическая доверительная область  $D$  никогда не вырождается в пустое множество. Доверительная область  $D$  в

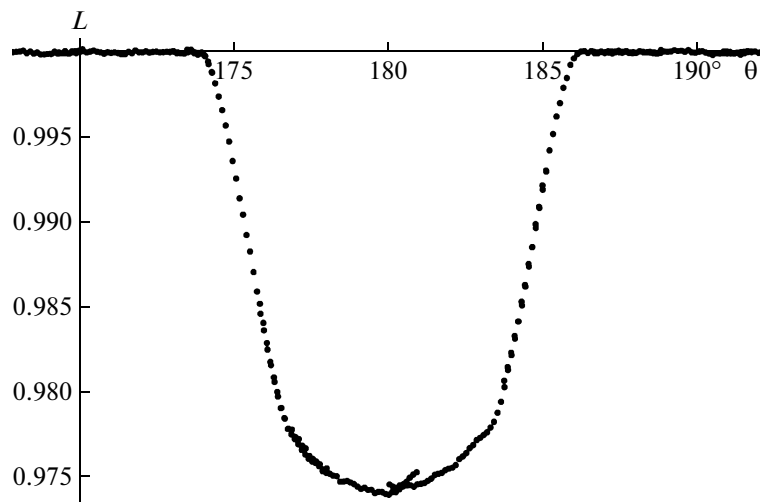
этом случае не зависит от объема выборки, и для области  $D$  можно указать вероятность  $\gamma$ , с которой она покрывает точное решение (эта вероятность называется уровнем доверия). В силу использования жесткого предположения об идеальной верности модели (связанного с использованием невязки, минимальной по искомым параметрам), ошибки параметров, найденные в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , также можно считать “внутренними”, хотя и более консервативными, чем ошибки, полученные методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло. Однако при этом не следует забывать, что для построения статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , используются значения дисперсии наблюдательных данных, что существенно отличает метод, основанный на статистике с законом распределения  $\chi^2_P$  от метода дифференциальных поправок. Данное различие может проявляться в том числе и на качественном уровне — если среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса (распределенная по закону приведенного хи-квадрат) значительно отличается от единицы, т.е. в случаях, когда есть основания считать, что модель неадекватна наблюдательным данным либо что имеется сильная скоррелированность в наблюдательных данных. В этой связи ошибки параметров, найденные в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , можно рассматривать и как “внешние” ошибки, так как в данном случае используется информация о дисперсии “внешних” наблюдательных данных.

Наиболее консервативные “внешние” ошибки параметров получаются в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ , при использовании которой не делается предположения об идеальной верности модели, а также существенное значение имеет использование дисперсии наблюдательных данных. Важно и то, что как поиск центральных значений параметров, так и нахождение доверительных интервалов для них в данном случае осуществляется в рамках одной и той же невязки (статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ ). Однако при использовании статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  при некоторых значениях уровня значимости  $\alpha$  доверительное множество  $D$  может оказаться пустым. Вследствие отсутствия изначального предположения об идеальной верности модели, при использовании статистики, распределенной по закону  $\chi^2_M$ , мы в качестве результата интерпретации наблюдений можем сделать лишь менее сильное утверждение об истинных значениях искоемых параметров — мы можем указать лишь вероятность (уровень значимости  $\alpha$ ), с которой мы ошибаемся, отвергая гипотезу о том, что совокупность истинных значений искоемых параметров принадлежит

некоторой области  $D$  (а строго говоря, невероятность  $\gamma$ , с которой доверительная область  $D$  содержит эту совокупность). Если полагать, что используемая модель адекватна наблюдательным данным, то можно считать, что вероятность того, что область  $D$  содержит точные значения всех искоемых параметров  $\gamma = 1 - \alpha$ , где  $\alpha$  — вероятность  $\alpha$  называется уровнем доверия для доверительной области  $D$ . Если же модель неадекватна наблюдательным данным, то это может означать, что, принимая модель, мы совершаем ошибку второго рода (модель неверна, но принимается по статистическому критерию). В этом случае равенство  $\gamma = 1 - \alpha$  для получаемой доверительной области является лишь приближенным.

Впрочем, не следует забывать и то, что чаще всего мы имеем дело не с полной наблюдаемой кривой блеска (генеральной совокупностью), а лишь с ее конкретной реализацией (выборкой). Поэтому может оказаться, что возникшие трудности с обоснованием адекватности модели связаны не с недостатками используемой модели, а со значительными статистическими отклонениями конкретных наблюдательных данных. Для кривой блеска, полученной в другую эпоху, используемая модель может оказаться вполне адекватной, и трудности с интерпретацией наблюдений не возникнут. Таким образом, строго говоря, используя для интерпретации конкретную реализацию, мы утверждаем не то, что модель неадекватна, а то, что имеющийся наблюдательный материал не дает возможности установить ее адекватность. Это и дает нам основания оценивать параметры модели и их ошибки даже в том случае, когда значение приведенного хи-квадрат  $\chi^2_{red}$  существенно превышает единицу.

Из этих рассуждений следует, что в случае параметрических обратных задач процедура нахождения искоемых параметров модели и их ошибок должна осуществляться совместно с проверкой адекватности модели наблюдательным данным. Использование статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  позволяет проверять адекватность модели наблюдательным данным (поскольку в данном случае не делается предположения об идеальной верности модели). При этом следует помнить, что мы принимаем модель по статистическому критерию не потому, что она идеально верна, а потому, что нет оснований ее отвергнуть. О том, насколько модель хорошо согласуется с наблюдательными данными (адекватна), можно судить по тому, насколько велик уровень значимости  $\alpha = \alpha_0$ , начиная с которого модель может быть отвергнута (значение  $\alpha_0$  называют критическим значением уровня значимости). Чем больше критическое значение  $\alpha_0$ , тем больше вероятность совершить ошибку 1-го рода, отвергнув модель, которую мы имеем



**Рис. 1.** Кривая блеска 1 звезды HD 189733 из работы [6] в фильтре  $\lambda = 5500\text{--}6000 \text{ \AA}$ . Данная кривая блеска имеет обрезанные крылья и скачок блеска в минимуме (вызванный наличием “пятна” на поверхности звезды).

возможность принимать при интерпретации (соответственно тем меньше у нас оснований отвергнуть модель). Критическому уровню значимости  $\alpha_0$  соответствует значение приведенного хи-квадрат для минимальной невязки  $\chi_{red}^2 = \frac{(\chi_{M-P}^2)_{\min}}{M-P}$ . Это значение  $\chi_{red}^2$  убывает с увеличением  $\alpha_0$  [12].

Следует отметить, что для нелинейных параметрических задач невязка, минимизированная по искомым нелинейным параметрам, строго говоря, не распределена по закону  $\chi_{M-P}^2$ , а лишь асимптотически стремится к этому закону при  $M \rightarrow \infty$  [14]. Поэтому критерий адекватности модели, основанный на близости величины  $\chi_{red}^2$  к единице, может использоваться лишь в случае, когда число точек наблюдения  $M$  достаточно велико. Как отмечено в работе [12], если  $\chi_{red}^2 = 1$ , то критический уровень значимости  $\alpha_0 \simeq 50\%$ , что соответствует очень хорошей модели. Действительно, в данном случае при интерпретации мы имеем возможность (выбирая соответствующий уровень значимости  $\alpha$ ) совершать до 50% ошибок 1-го рода, отвергая модель, т.е. мы можем, отвергая модель, ошибаться в каждом втором случае. Следовательно, в данном случае у нас нет оснований отвергнуть модель, и модель может быть принята. В случае, когда  $\chi_{red}^2$  превышает единицу, соответствующий критический уровень значимости  $\alpha_0 < 50\%$ . В данном случае, отвергая модель, мы совершаем сравнительно небольшое число ошибок 1-го рода, т.е. в большинстве случаев, отвергая модель, мы правы. Значит, в этом случае у нас есть основания отвергнуть модель. Если же при интерпретации наблюдений мы получаем значение  $\chi_{red}^2 < 1$ , то соответствующее значение  $\alpha_0 > 50\%$ . Поскольку в

случае, когда наблюдательные данные распределены по нормальному закону, такая ситуация даже для идеально верной модели весьма маловероятна (см., например, [12]), значение  $\chi_{red}^2 < 1$ , и соответственно  $\alpha_0 > 50\%$ , может свидетельствовать о том, что исходные наблюдательные данные скоррелированы, и в них содержится не только случайная, но и систематическая ошибка.

Наконец, еще раз поясним необходимость проверки адекватности модели при решении обратных параметрических задач. Возможность независимой проверки адекватности модели следует из того, что число точек наблюдения  $M$  сильно превышает число искомым параметров  $P$ , т.е. обратная параметрическая задача, как правило, является сильно переопределенной. Для оценки ошибок искомым параметров, строго говоря, необходимо знать точную кривую блеска, соответствующую идеально точным значениям искомым параметров. Однако в реальности идеально точная кривая блеска (соответствующая идеально точным значениям параметров) неизвестна; вместо нее мы имеем лишь наблюдаемую кривую блеска, обремененную ошибками наблюдений. Возникает вопрос, насколько оптимально наблюдаемая кривая блеска “натянута” на идеально точную кривую блеска. Другими словами, прежде чем решать обратную параметрическую задачу, мы должны ответить на вопрос, насколько правомочно заменить заранее неизвестную нам идеально точную кривую блеска наблюдаемой кривой.

Проверка адекватности модели и позволяет нам ответить на этот принципиально важный вопрос. Если окажется, что  $\chi_{red}^2 \simeq 1$ , т.е.  $\alpha_0 \simeq 50\%$ , то у нас нет оснований отвергнуть модель, и модель

**Таблица 1.** Стандартное отклонение и средний внезатменный блеск для кривых блеска

$\lambda, \text{\AA}$	$L_{both}$	$\sigma_{both}$	$M_{both}$	$L_{left}$	$\sigma_{left}$	$M_{left}$	$L_{right}$	$\sigma_{right}$	$M_{right}$
5750	0.99998229	0.00007672	146	0.99997273	0.000078	79	0.99999736	0.000065	67
6250	0.99997042	0.0003168	146	0.99994661	0.00035	79	1.0000079	0.00026	67
6750	0.99994702	0.0002085	145	0.9999172	0.00022	78	0.99999414	0.00017	67
7250	0.99996076	0.0001496	145	0.99993531	0.00016	78	1.000001	0.0001	67
7750	0.99997562	0.0001421	146	0.99996303	0.00014	79	0.99999546	0.00014	67
8250	0.99999351	0.0001321	147	0.99999245	0.00013	80	0.99999517	0.00013	67
8750	1.0000042	0.0001558	147	1.0000095	0.00016	80	0.9999958	0.00015	67
9250	0.99999268	0.0001766	147	0.99999	0.00018	80	0.9999969	0.00017	67
9750	1.0000026	0.0002123	145	1.0000063	0.00022	78	0.99999678	0.0002	67
10 250	1.0000438	0.0003353	148	1.0000711	0.00036	80	1.0000006	0.00028	68

может быть принята. Воображаемая идеально точная кривая блеска при этом оптимально проходит среди наблюдательных точек реальной кривой блеска, и у нас есть все основания заменить идеально точную кривую блеска наблюдаемой кривой. Получаемые при этом значения параметров модели близки к их идеально точным значениям. Кроме того, поскольку наблюдаемая кривая блеска оптимально “натянута” на идеально точную кривую, а в “точную” кривую вклад систематических ошибок пренебрежимо мал, имеется возможность оценить надежные значения ошибок параметров, которые накрывают идеально точные значения параметров с заданной вероятностью  $\gamma$ . При этом для оценки ошибок параметров можно, в зависимости от степени ответственности суждения о результатах решения задачи, применять разные методы. Это может быть либо метод дифференциальных поправок или метод Монте-Карло, которые позволяют получить “внутренние” ошибки, либо метод доверительных областей, опирающийся на статистику с законом распределения  $\chi^2_M$  и дающий “внешние” ошибки, либо (промежуточный случай) метод доверительных областей, использующий статистику с законом распределения  $\chi^2_P$ .

Если же при решении обратной параметрической задачи получается значение  $\chi^2_{red} > 1$  и соответственно  $\alpha_0 < 50\%$ , вопрос о принятии модели уже не является столь бесспорным. Модель может оказаться “плохой”, поскольку в данном случае мы можем принять для используемой модели только такой уровень значимости  $\alpha$ , на котором вероятность совершить ошибку 1-го рода мала, т.е. мы вынуждены редко ошибаться, отвергая модель. В данном случае статистический критерий подсказывает нам, что модель должна быть отвергнута, и нам необходимо позаботиться о построении новой,

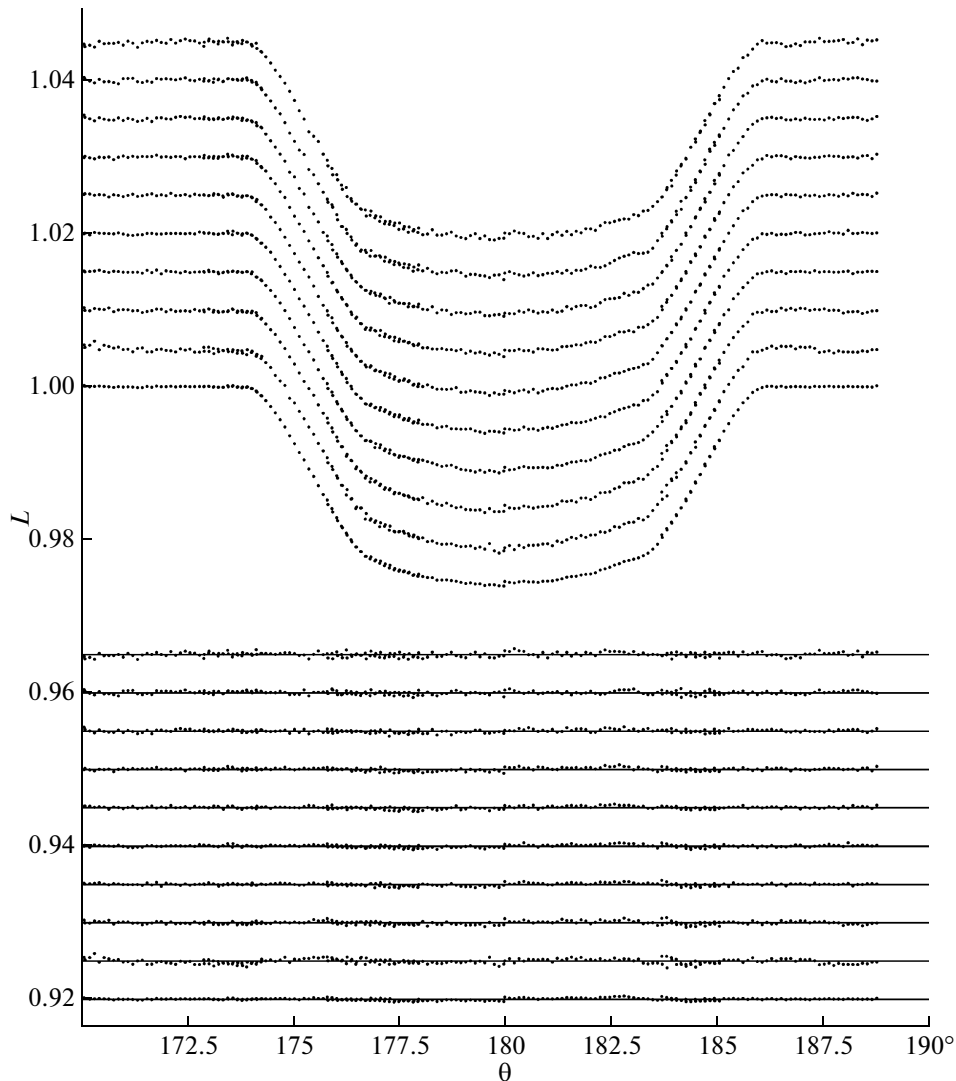
более совершенной модели. На практике часто бывает так, что при решении обратной параметрической задачи величина  $\chi^2_{red} > 1$ , а соответствующий критический уровень значимости  $\alpha_0 < 10\%$ . В этих случаях следует иметь в виду, что если мы берем на себя смелость принять модель, мы должны считаться с тем, что результаты определения искомого параметров и их доверительных интервалов отягощены вкладом систематических ошибок, вызванных тем, что идеально точная кривая блеска проходит не вполне оптимально среди точек наблюдаемой кривой блеска либо имеется сильная скоррелированность в наблюдательных данных (отметим, что в данном случае, в отличие от случая, когда  $\alpha_0 > 50\%$ , мы не можем однозначно утверждать, что систематическая ошибка вызвана именно скоррелированностью наблюдательных данных). В этих случаях получаемые значения параметров модели и их ошибки будут менее надежны.

Подробное изложение затронутых выше вопросов изложено в работах [1, 11, 12, 14].

### 3. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ

В данной работе выполнен анализ многоцветной транзитной кривой блеска двойной системы с экзопланетой HD 189733 из работы [5]. Кривые блеска были получены на космическом телескопе имени Хаббла (HST) в течение 3 наблюдательных сетов с длительностью каждого в 5 орбитальных витков космической обсерватории. Сеты наблюдений проведены 22, 26 мая и 14 июля 2006 г.

Наблюдения HD 189733 проведены с помощью Advanced Camera for Surveys (ACS) в режиме HRC. В конечном итоге получены 10 наблюдательных затменных кривых блеска в диапазонах  $\lambda = 5500-6000, 6000-6500, 6500-7000, 7000-7500,$



**Рис. 2.** Кривые блеска HD 189733 в фильтрах  $\lambda = 5500\text{--}10\,500 \text{ \AA}$ . Длина волны возрастает снизу вверх. Внизу приведены невязки для случая квадратичного закона потемнения при оптимальных значениях параметров.

7500–8000, 8000–8500, 8500–9000, 9000–9500, 9500–10000, 10 000–10 500  $\text{\AA}$ . Более детальная информация о наблюдательных данных содержится в работе [5]. Далее, при анализе кривых блеска, мы принимаем следующие центральные длины волн:  $\lambda = 5750, 6250, 6750, 7250, 7750, 8250, 8750, 9250, 9750, 10\,250 \text{ \AA}$ .

Каждая кривая блеска включает в себя 675 индивидуальных значений блеска. На рис. 1 представлена наблюдаемая кривая блеска, полученная в диапазоне длин волн  $\lambda = 5500 - 6000 \text{ \AA}$  (центральная длина волны  $\lambda = 5750 \text{ \AA}$ ).

Из рис. 1 видно, что пятна на поверхности звезды [5] оказывают весьма заметное возмущение на изменения блеска в фазах затмения. Также заметен сдвиг правой и левой части кривой блеска относительно друг друга по оси ординат, вызванный

наличием либо пятна на поверхности звезды, либо систематической ошибки в наблюдениях. Перечисленные особенности потребовали внимательного анализа, а также некоторой корректировки кривой блеска.

Предполагалось, что ошибки наблюдений описываются нормальным законом распределения. Дисперсия  $\sigma^2$  индивидуальных значений кривой блеска полагалась одинаковой для всех точек той части кривой блеска, по которой проводилась интерпретация. Ее значение получено путем усреднения квадратов отклонения наблюдаемых внезатменных значений блеска от среднего значения внезатменного блеска совместно по левой и правой ветвям кривой блеска, отдельно по левой и отдельно по правой ветви кривой блеска. Полученные значения  $\sigma$  и были приняты за стандартное отклонение индивидуального измерения блеска при

**Таблица 2.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11184	0.00054	0.01760	0.00011	85.715°	0.054°	0.555	0.017	2.3457	$1.9 \times 10^{-9}$
6250	0.1130	0.0011	0.01790	0.00025	85.60	0.11	0.609	0.037	0.51644	0.99996
6750	0.11185	0.00090	0.01765	0.00020	85.697	0.091	0.615	0.028	0.78673	0.956
7250	0.11133	0.00073	0.01751	0.00016	85.754	0.073	0.590	0.022	0.96149	0.695
7750	0.11172	0.00066	0.01758	0.00014	85.716	0.065	0.556	0.020	1.1113	0.345
8250	0.11219	0.00073	0.01768	0.00015	85.693	0.072	0.540	0.023	1.5651	0.0031
8750	0.11225	0.00072	0.01765	0.00015	85.682	0.071	0.519	0.023	1.0306	0.53
9250	0.11186	0.00080	0.01756	0.00016	85.731	0.079	0.490	0.025	1.0506	0.48
9750	0.1110	0.0010	0.01740	0.00021	85.79	0.10	0.479	0.033	1.1975	0.19
10250	0.1117	0.0013	0.01755	0.00026	85.75	0.13	0.497	0.041	0.69904	0.99

**Таблица 3.** Результаты интерпретации правой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11159	0.00069	0.01738	0.00015	85.793°	0.072°	0.578	0.023	4.2535	0
6250	0.1124	0.0015	0.01761	0.00034	85.71	0.16	0.590	0.053	1.3380	0.075155
6750	0.1118	0.0012	0.01746	0.00028	85.77	0.13	0.631	0.041	1.9672	0.000029131
7250	0.11164	0.00085	0.01741	0.00019	85.791	0.091	0.617	0.028	2.6644	$1.2811 \times 10^{-10}$
7750	0.11173	0.00086	0.01740	0.00019	85.784	0.091	0.593	0.029	1.4333	0.030473
8250	0.11177	0.00078	0.01742	0.00017	85.786	0.082	0.570	0.026	1.3065	0.098526
8750	0.11185	0.00088	0.01738	0.00019	85.771	0.092	0.534	0.030	1.4180	0.035518
9250	0.11104	0.00092	0.01725	0.00019	85.845	0.097	0.521	0.032	1.1435	0.31474
9750	0.1108	0.0012	0.01727	0.00025	85.84	0.12	0.497	0.042	1.4684	0.021212
10250	0.1110	0.0013	0.01726	0.00027	85.83	0.13	0.506	0.045	0.84083	0.89432

интерпретации по соответствующей части кривой блеска.

Предварительно мы исключили внезатменную часть первого сета наблюдений с фазой  $\theta < 160^\circ$ , в которой присутствовал явный систематический сдвиг относительно всех остальных значений кривой блеска внезатменной части.

Средний внезатменный блеск  $L$ , стандартное отклонение индивидуального измерения блеска  $\sigma$ , и

число точек наблюдения в затмении  $M$  для каждой кривой блеска (обеих ветвей в совокупности с индексом “both”, левой ветви в отдельности с индексом “left”, правой ветви в отдельности с индексом “right”) приведены в табл. 1. Видно, что точность наблюдаемой кривой блеска составляет  $\sim 10^{-4}$ , что по отношению к глубине затмения составляет  $\sim 1\%$ .

Главной особенностью наблюдаемых затменных кривых блеска являлось наличие возмущения в



**Таблица 4.** Результаты интерпретации совместно правой и левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11192	0.00059	0.01755	0.00012	85.726°	0.060°	0.556	0.019	5.5168	0
6250	0.1129	0.0011	0.01780	0.00024	85.64	0.11	0.600	0.036	1.0071	0.55
6750	0.11204	0.00086	0.01761	0.00019	85.706	0.088	0.614	0.028	1.5321	0.00010
7250	0.11171	0.00068	0.01753	0.00015	85.740	0.070	0.591	0.022	1.9306	$6 \times 10^{-10}$
7750	0.11196	0.00068	0.01756	0.00014	85.717	0.069	0.561	0.022	2.0916	$10^{-12}$
8250	0.11215	0.00066	0.01760	0.00014	85.715	0.067	0.545	0.022	2.2529	$4 \times 10^{-15}$
8750	0.11230	0.00073	0.01758	0.00015	85.695	0.073	0.515	0.024	2.0264	$2 \times 10^{-11}$
9250	0.11166	0.00070	0.01747	0.00014	85.758	0.071	0.494	0.023	1.4922	0.00029
9750	0.11103	0.00080	0.01736	0.00016	85.804	0.080	0.482	0.026	1.3541	0.0063
10 250	0.11150	0.00096	0.01745	0.00020	85.765	0.097	0.493	0.032	0.79637	0.98

минимуме (в районе  $180^\circ < \theta < 190^\circ$  для точек из первого сета наблюдений), вызванное наличием пятен на поверхности звезды [5]. Кроме того, если даже исключить из рассмотрения упомянутое возмущение, то ход кривой блеска вблизи минимума заметно искажается при  $\theta \sim 180^\circ$ . Поэтому кроме интерпретации с использованием всех точек кривой блеска мы провели интерпретацию без использования точек с  $\theta > 180^\circ$  (интерпретацию левой (нисходящей) ветви кривой блеска) и интерпретацию без использования точек с  $\theta < 180^\circ$  (интерпретацию правой (восходящей) ветви кривой блеска).

Окончательные кривые блеска, анализ которых проведен в данной работе, представлены на рис. 2. Для наглядности нуль-пункты кривых блеска для разных  $\lambda$  смещены друг относительно друга. Там же даны теоретические кривые блеска и соответствующие им кривые невязок, вычисленные в рамках оптимальной модели с квадратичным законом потемнения к краю.

#### 4. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВЫХ БЛЕСКА В РАМКАХ ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ

При анализе наблюдаемых кривых блеска искомыми параметрами являлись радиус звезды  $r_s$ , радиус экзопланеты  $r_p$ , наклонение орбиты  $i$  и коэффициент  $x$  в линейном законе потемнения к краю. Спектральный класс звезды в системе HD 189733 описывается как K2V [7]. Орбитальный период принят равным  $P_{orb} = 2.218581^d$  [5],

отношение масс планеты и звезды  $q = m_p/m_s = 0.014$  [5], орбита системы предполагалась круговой, радиус относительной орбиты принят равным единице. Минимизация невязки проводилась одновременно по всем искомым параметрам. Использовались наблюдательные точки в интервале фаз, охватывающих лишь затменную часть кривой блеска (количества этих точек  $M$  для соответствующих частей кривых блеска приведены в табл. 1). Внезатменные участки кривых блеска при интерпретации не использовались, так как они были использованы для независимого определения стандартных отклонений кривых блеска (табл. 1).

##### 4.1. Метод дифференциальных поправок

В табл. 2, 3, 4 приведены результаты интерпретации левой части, правой части транзитной кривой блеска, а также всей кривой блеска соответственно. Здесь центральные значения параметров и их ошибки (на уровне  $2\sigma$ ) получены методом дифференциальных поправок. Поскольку в нашем случае используемая модель оказывается чаще всего “плохой” (см. ниже), мы вынуждены указывать ошибки параметров на уровне  $2\sigma$ , что соответствует уровню доверия  $\gamma = 95.5\%$ . Кроме того, следует иметь в виду, что в случае определения ошибок параметров методом дифференциальных поправок для многопараметрической модели истинное значение каждого из искомых параметров попадает в соответствующий интервал ошибок с заданной вероятностью независимо от попадания истинных значений других искомых параметров в их интервалы ошибок.

**Таблица 5.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11184	0.00055	0.01760	0.00011	85.715°	0.054°	0.555	0.017
6250	0.1130	0.0025	0.01788	0.00055	85.61	0.25	0.607	0.080
6750	0.1118	0.0016	0.01764	0.00035	85.70	0.16	0.614	0.049
7250	0.1113	0.0012	0.01751	0.00025	85.76	0.12	0.590	0.035
7750	0.11171	0.00094	0.01758	0.00020	85.717	0.092	0.556	0.029
8250	0.11217	0.00091	0.01767	0.00019	85.695	0.090	0.540	0.029
8750	0.1123	0.0011	0.01765	0.00022	85.68	0.10	0.518	0.034
9250	0.1119	0.0012	0.01756	0.00025	85.73	0.12	0.490	0.040
9750	0.1110	0.0015	0.01739	0.00029	85.79	0.14	0.477	0.046
10250	0.1117	0.0026	0.01754	0.00053	85.75	0.26	0.493	0.082

**Таблица 6.** Результаты интерпретации правой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11159	0.00052	0.01738	0.00011	85.794°	0.055°	0.578	0.018
6250	0.1124	0.0019	0.01760	0.00043	85.72	0.20	0.589	0.069
6750	0.1118	0.0013	0.01745	0.00031	85.77	0.14	0.631	0.046
7250	0.11164	0.00082	0.01741	0.00019	85.792	0.089	0.617	0.028
7750	0.1117	0.0011	0.01739	0.00025	85.79	0.12	0.593	0.038
8250	0.1118	0.0010	0.01742	0.00023	85.79	0.11	0.570	0.036
8750	0.1118	0.0011	0.01737	0.00024	85.77	0.12	0.533	0.039
9250	0.1110	0.0013	0.01725	0.00028	85.85	0.14	0.520	0.046
9750	0.1108	0.0015	0.01726	0.00031	85.85	0.16	0.496	0.053
10250	0.1110	0.0022	0.01725	0.00045	85.83	0.23	0.503	0.076

Возникает вопрос: какова вероятность совместного попадания искомым параметров во все интервалы ошибок? Естественно потребовать, чтобы эта вероятность была не меньше заданного уровня доверия. Если рассматривать совокупность центральных значений параметров как  $P$ -мерную случайную величину, принимающую значения в  $P$ -мерном пространстве искомым параметров  $\beta_1, \dots, \beta_P$ , то попадание истинного значения  $\bar{\beta}_i$

одного из искомым параметров  $\beta_i$  в соответствующий интервал ошибок будет означать попадание точки, соответствующей совокупности истинных значений, в область между двумя  $(P - 1)$ -мерными гиперплоскостями  $\beta_i = \beta_i^c - \kappa\sigma_i$  и  $\beta_i = \beta_i^c + \kappa\sigma_i$  ( $\kappa$  — коэффициент, соответствующий выбранному уровню доверия).

Таким образом, метод дифференциальных поправок можно рассматривать как нахождение

**Таблица 7.** Результаты интерпретации совместно правой и левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{Å}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11192	0.00039	0.017552	0.000083	85.726°	0.040°	0.556	0.013
6250	0.1129	0.0017	0.01780	0.00036	85.64°	0.17°	0.598	0.055
6750	0.1120	0.0011	0.01761	0.00024	85.71	0.11	0.614	0.035
7250	0.11170	0.00078	0.01752	0.00017	85.743	0.080	0.591	0.025
7750	0.11194	0.00072	0.01755	0.00015	85.719	0.072	0.562	0.023
8250	0.11215	0.00068	0.01760	0.00014	85.715	0.069	0.545	0.022
8750	0.11229	0.00078	0.01758	0.00016	85.698	0.078	0.515	0.026
9250	0.11166	0.00093	0.01747	0.00019	85.759	0.095	0.493	0.031
9750	0.1110	0.0010	0.01736	0.00021	85.81	0.10	0.482	0.034
10250	0.1115	0.0017	0.01745	0.00036	85.77	0.18	0.491	0.058

**Таблица 8.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{Å}$	$r_s$	$\Delta_M(r_s)$	$r_p$	$\Delta_M(r_p)$	$i$	$\Delta_M(i)$	$x$	$\Delta_M(x)$
6250	0.1127	0.0066	0.0178	0.0014	85.67°	0.67°	0.59	0.22
6750	0.1118	0.0034	0.01761	0.00074	85.71	0.34	0.61	0.10
7250	0.1113	0.0020	0.01750	0.00043	85.76	0.20	0.589	0.061
7750	0.1117	0.0013	0.01758	0.00027	85.72	0.13	0.556	0.040
8750	0.1122	0.0017	0.01765	0.00035	85.69	0.17	0.517	0.055
9250	0.1118	0.0019	0.01755	0.00039	85.74	0.19	0.488	0.061
9750	0.1110	0.0016	0.01739	0.00032	85.79	0.16	0.477	0.051
10250	0.1116	0.0059	0.0175	0.0012	85.78	0.61	0.47	0.19

$P$ -мерной доверительной области упомянутого вида. При этом совокупное попадание истинных значений искомых параметров в соответствующие интервалы ошибок означает попадание точки, соответствующей совокупности истинных значений параметров в  $P$ -мерный параллелепипед с центром в точке  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$ , и размерами ребер  $2k\sigma_1, \dots, 2k\sigma_P$ . Очевидно, что вероятность попадания совокупности истинных значений в такой параллелепипед будет меньше, чем вероятность независимого попадания истинных значений параметров в соответствующие интервалы ошибок,

т.е. меньше заданной вероятности. А для того, чтобы точка в  $P$ -мерном пространстве искомых параметров, соответствующая совокупности истинных значений параметров, попадала с заданной вероятностью  $\gamma$  в  $P$ -мерный параллелепипед с центром в точке  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$  и со сторонами, пропорциональными по размеру  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$ , т.е. для того, чтобы с заданной вероятностью  $\gamma$  истинные значения искомых параметров попадали в соответствующие интервалы одновременно, такие интервалы (размеры ребер  $P$ -мерного параллелепипеда) необходимо выбрать как  $k\sigma_i$ , где  $k > 1$ .

**Таблица 9.** Сравнение зависимости от длины волны отношения радиусов планеты и звезды  $r_p/r_s$  из данной работы и работы [6]. (В качестве ошибки приведено значение  $1\sigma$ )

$\lambda, \text{Å}$	Наши расчеты	Данные работы [6]
5750	$0.156894 \pm 0.000281$	$0.156903 \pm 0.000095$
6250	$0.157762 \pm 0.000658$	$0.156744 \pm 0.000065$
6750	$0.157387 \pm 0.000458$	$0.156552 \pm 0.000057$
7250	$0.157045 \pm 0.000341$	$0.156388 \pm 0.000059$
7750	$0.156917 \pm 0.000358$	$0.156501 \pm 0.000064$
8250	$0.156984 \pm 0.000348$	$0.156210 \pm 0.000073$
8750	$0.156569 \pm 0.000388$	$0.156147 \pm 0.000081$
9250	$0.156451 \pm 0.000391$	$0.156120 \pm 0.000092$
9750	$0.156361 \pm 0.000463$	$0.156097 \pm 0.000125$
10 250	$0.156389 \pm 0.000611$	$0.155716 \pm 0.000218$

Вероятность же попадания  $P$ -мерной случайной точки в  $P$ -мерный параллелепипед равна  $P$ -кратному интегралу от многомерной плотности распределения по упомянутому параллелепипеду. При этом существенно то, что для определения вида этой функции плотности (и нахождения соответствующего интеграла от нее) недостаточно знания одних только стандартных отклонений случайных величин  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$ . В случае модели, линейно зависящей от параметров  $\beta_1, \dots, \beta_P$  (центральные значения которых  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$  распределены по закону Гаусса) [11]), такой функцией распределения будет<sup>1</sup>

$$f(\beta_1, \dots, \beta_P) = \quad (3)$$

$$= K \exp \left[ \sum_{i,j=1}^P A_{ij} (\beta_i - \bar{\beta}_i) (\beta_j - \bar{\beta}_j) \right],$$

где  $K$  — нормировочный коэффициент, а матрица  $A$  является обратной по отношению к матрице ковариаций  $\text{cov}(\beta_i^c, \beta_j^c)$ .

Таким образом, даже в линейной модели (или в линейном приближении) для определения ве-

роятности совокупного попадания истинных значений искомым интервалов в их интервалы ошибок (или обратной задачи нахождения коэффициента  $k$ ) необходимо знать ковариации центральных значений. А при одних и тех же значениях стандартных отклонений  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$  в разных случаях вероятности совокупного попадания (или коэффициент  $k$ ) могут быть различными. Однако в любом случае  $k\kappa\sigma_i$  будет меньше, чем соответствующие проекции доверительной области, полученной в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  для данного уровня доверия<sup>2</sup>  $\gamma$ . Например, на уровне доверия  $\gamma = 0.955 \dots$  (т.е. при  $\kappa = 2$ ) проекция доверительной области, полученной в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  ( $P$  — число искомым параметров) в случае 4-параметрической модели  $\Delta_P = 3.12\sigma$ , а в 5-параметрической модели  $\Delta_P = 3.36\sigma$  [11]. Таким образом, при уровне доверия “2 $\sigma$ ” ( $\gamma = 0.955 \dots$ )  $k \lesssim 1.56$  для 4-параметрической линейной модели и  $k \lesssim 1.68$  для 5-параметрической линейной модели. Отметим, что при уровне доверия “1 $\sigma$ ” ( $\gamma = 0.68$ ) величина  $k \lesssim 2.17$  для 4-параметрической модели и  $k \lesssim 2.42$  для 5-параметрической модели.

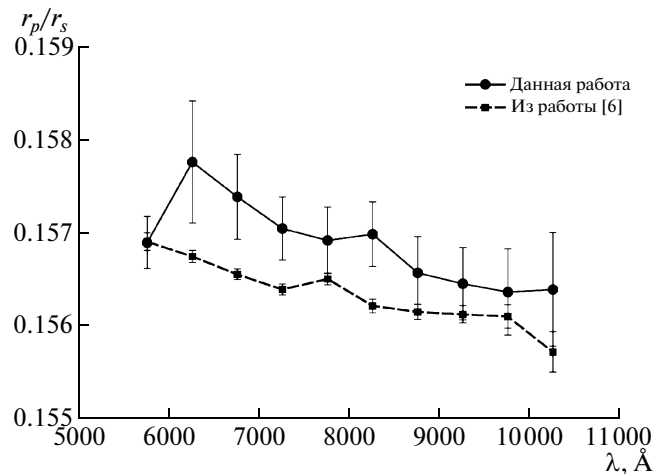
Помимо значений искомым параметров, в табл. 2–4 приведены также значения минимального приведенного хи-квадрат  $\chi_{red}^2 = (\chi_{M-P}^2)_{\min} / (M - P)$  и критического уровня значимости  $\alpha_0$ . Значение  $\chi_{red}^2$ , как уже отмечалось выше, может служить для проверки адекватности модели наблюдательным данным.

Проверка адекватности модели показала (табл. 2–4), что в большинстве случаев наша модель является “плохой”. В случае интерпретации правой ветви кривой блеска (табл. 3) и всей кривой блеска (табл. 4) величина  $\chi_{red}^2$  для большинства длин волн  $\lambda$  существенно превосходит единицу, и соответствующее значение  $\alpha_0$  весьма мало — оно составляет несколько процентов, а в некоторых случаях близко к нулю. Кроме того, для отдельных длин волн величина  $\chi_{red}^2$  существенно меньше единицы, а соответствующее значение  $\alpha_0 > 50\%$ . Это, как уже было отмечено выше, скорее всего, свидетельствует о скоррелированности наблюдательных точек на кривой блеска, что может свидетельствовать о наличии систематических ошибок в наблюдательных данных.

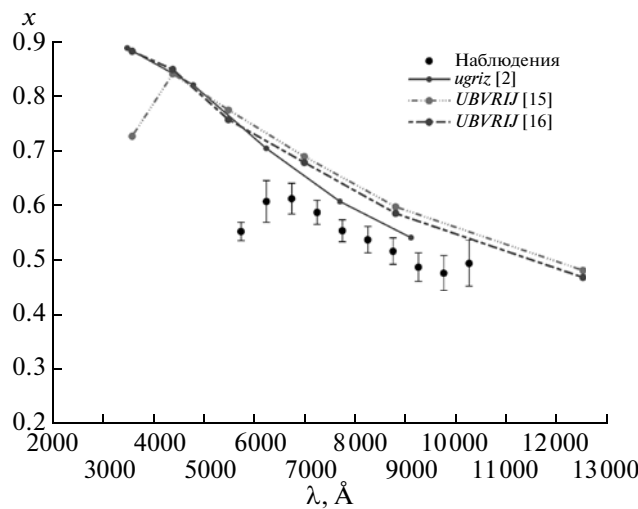
В случае интерпретации левой ветви кривой блеска (табл. 2) для 3 длин волн из 10 значение  $\chi_{red}^2 < 1$ , а соответствующее значение  $\alpha_0 > 50\%$ .

<sup>2</sup> Поскольку эти проекции являются измерениями  $P$ -мерного параллелепипеда, пропорциональными  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$ , они содержат истинные значения искомым параметров с вероятностью, большей  $\gamma$ .

<sup>1</sup> Можно отметить, что показатель экспоненты в (3) равен разности функционала невязки как функции искомым параметров и минимального значения этого функционала [11], и каждая поверхность уровня функции  $f$  (представляющая собой  $P$ -мерный эллипсоид) ограничивает доверительную область, полученную при некотором уровне доверия в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ .



**Рис. 3.** Зависимость отношения радиуса планеты к радиусу звезды от длины волны согласно результатам нашей работы (темные кружки) и согласно работе [6] (темные квадратики). В обоих случаях указаны ошибки, полученные на уровне  $1\sigma$ . В нашем случае ошибки больше ввиду того, что коэффициент потемнения к краю не фиксирован, а ищется совместно с другими параметрами задачи.



**Рис. 4.** Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  для звезды HD 189733 от длины волны  $\lambda$  в предположении линейного закона потемнения к краю, полученная на основе анализа левой ветви кривых блеска из работы [6]. Ошибки коэффициента потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициента потемнения к краю в фотометрических системах *ugriz* и *UBVRIJ* приведены из работ [2, 15, 16].

Это свидетельствует о том, что, скорее всего, левая ветвь кривой блеска наиболее сильно подвержена влиянию систематических ошибок. Как отмечалось выше, именно эти трудности ( $\chi_{red}^2 < 1$  и  $\chi_{red}^2 \gg 1$ ) с интерпретацией кривых блеска системы HD 189733 вынуждают нас выбрать уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$  (что соответствует  $2\sigma$  в методе дифференциальных поправок), а не  $68\%$ , что характерно для “хороших” моделей. По этой же причине для случаев правой ветви кривой блеска (табл. 3)

и полной кривой блеска (табл. 4) нам не удалось построить “точные” доверительные области D в рамках статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  и дать наиболее консервативные оценки “внешних” ошибок параметров. Мы ограничились лишь построением асимптотических доверительных областей для искомых параметров с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Для случая левой ветви кривой блеска нам удалось построить доверительные области как в рамках

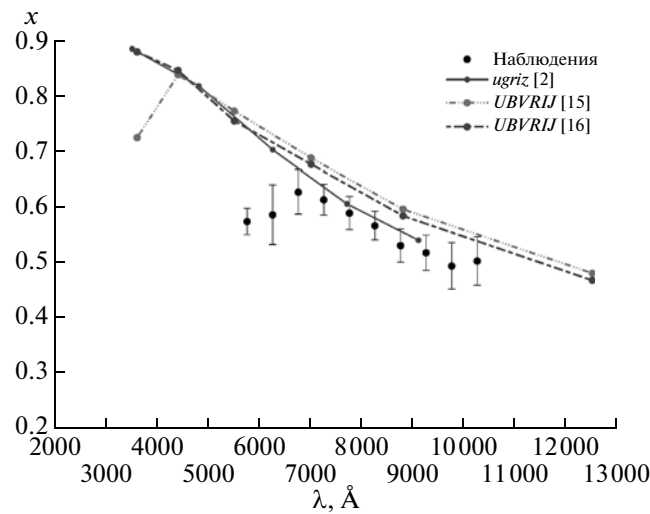


Рис. 5. То же, что на рис. 4, на основе анализа правой ветви кривых блеска.

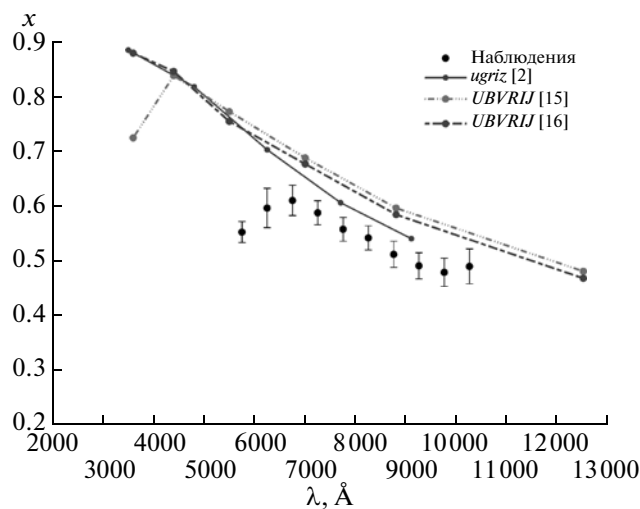


Рис. 6. То же, что на рис. 4, на основе анализа совместно левой и правой ветви кривых блеска.

статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , так и в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ .

#### 4.2. Метод доверительных областей

В качестве статистики метода доверительных областей мы использовали статистику с законом распределения  $\chi^2_P$  ( $P$  — число искоемых параметров) и  $\chi^2_M$  ( $M$  — число точек наблюдения). Для работы принят уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ , что в случае метода дифференциальных поправок соответствует  $2\sigma$ , где  $\sigma$  — стандартное отклонение. Статистика с законом распределения  $\chi^2_M$  использовалась лишь для левой ветви кривой блеска. Результаты интерпретации левой ветви кривой блеска

в рамках метода доверительных областей с использованием статистики  $\chi^2_M$  представлены далее в табл. 8.

Результаты интерпретации в рамках метода доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  приведены в табл. 5–7. Здесь даны оптимальные значения параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ , а также их ошибки, которые характеризуются проекцией асимптотической доверительной области  $D$  в пространстве 4 искоемых параметров на оси  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$  (доверительными интервалами). Для удобства сравнения с ошибками, полученными в методе дифференциальных поправок (табл. 2–4), в табл. 5–7 приведены величины  $\Delta_P$ , представля-

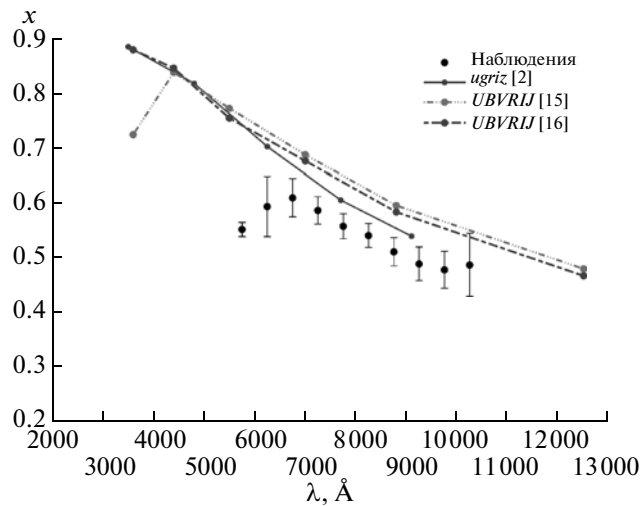


Рис. 7. То же, что на рис. 6, в случае, когда ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ .

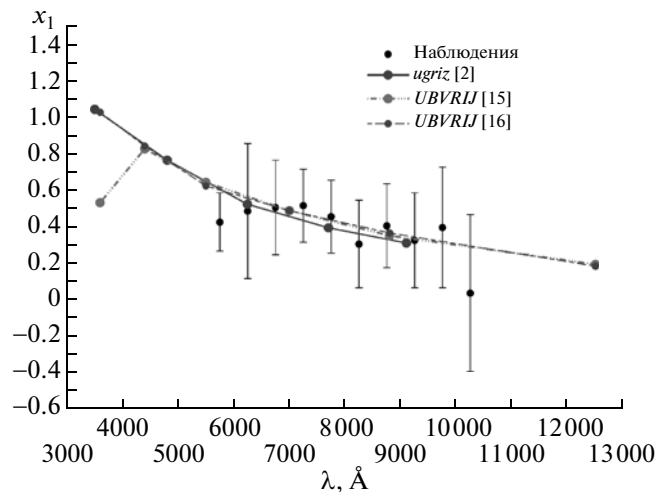


Рис. 8. То же, что на рис. 4, для линейного коэффициента  $x_1$  в предположении квадратичного закона потемнения к краю.

ющие собой половины доверительных интервалов. В случае метода доверительных областей в таблицах указаны не центральные значения искомых параметров, а значения параметров, соответствующие серединам доверительных интервалов. Вероятность накрытия точных значений каждого из параметров  $r_p, r_s, i, x$  соответствующим доверительным интервалом превышает 95.5%. Вероятность накрытия точного решения задачи (совокупности всех параметров  $r_p, r_s, i, x$ ) асимптотической доверительной областью близка к заданной вероятности  $\gamma = 95.5\%$ , поскольку число точек на кривой блеска велико ( $M \gtrsim 70$ ). Вероятность накрытия точного решения всеми доверительными интерва-

лами одновременно превышает заданный уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ .

### 5. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ РАДИУСА ПЛАНЕТЫ И КОЭФФИЦИЕНТА ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ ЗВЕЗДЫ В ЛИНЕЙНОМ ЗАКОНЕ

Наша модель с линейным законом потемнения к краю в применении к системе HD 189733 для большинства длин волн оказалась “плохой”. Это неудивительно, поскольку, согласно работе [6], на кривых блеска в системе HD 189733 наблюдаются следы проявления пятен на поверхности звезды, которые не учитываются в нашей модели. Лишь

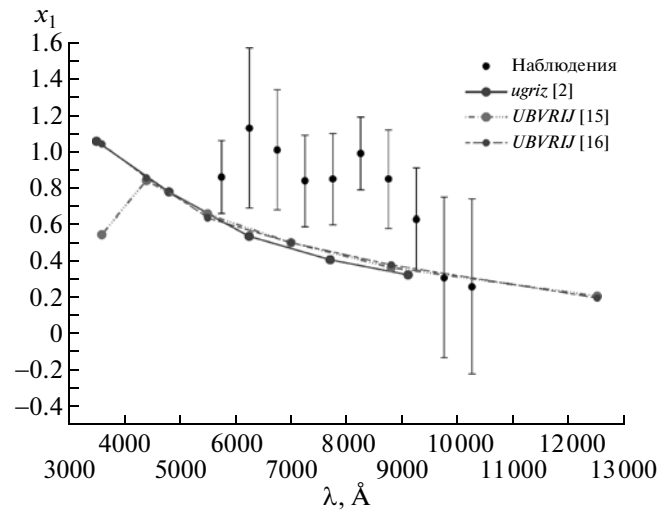


Рис. 9. То же, что на рис. 8, на основе анализа правой ветви кривых блеска.

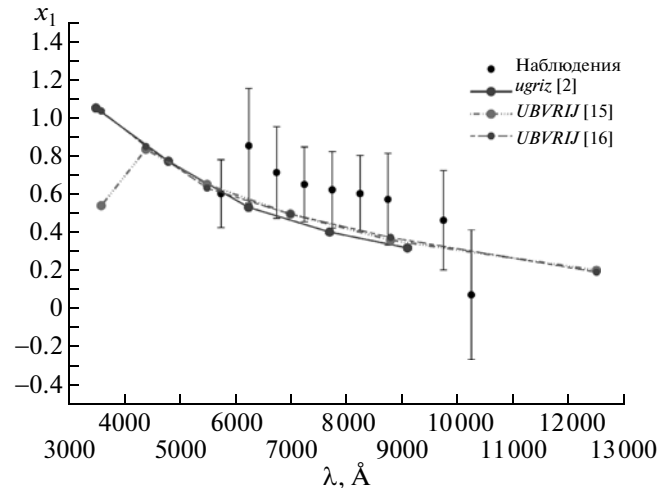


Рис. 10. То же, что на рис. 8, на основе анализа совместно левой и правой ветви кривых блеска.

в случае левой ветви кривой блеска наша модель с линейным законом потемнения для большинства длин волн отвергается на достаточно высоком уровне значимости, и в данном случае мы можем оценить наиболее консервативные “внешние” ошибки параметров на уровне доверия  $\gamma = 95.5\%$ , используя статистику с законом распределения  $\chi^2_M$  (табл. 8).

В работе [6] получена зависимость отношения радиуса экзопланеты к радиусу звезды  $r_p/r_s$  от

длины волны в системе HD189733. В табл. 9 мы приводим наши результаты, основанные на анализе полных кривых блеска, и результаты из работы [6]. Поскольку в нашем случае ищется не отношение  $r_p/r_s$ , а параметры  $r_p$ ,  $r_s$  в отдельности, ошибка  $r_p/r_s$  получена методом дифференциальных поправок как ошибка для нового параметра. Общая формула для стандартных отклонений при замене переменных приведена в [1]. Применительно к данному случаю

$$\sigma(r_p^c/r_s^c) = \sqrt{\left(\frac{r_p^c}{(r_s^c)^2}\right)^2 \sigma^2(r_s^c) - 2\text{cov}(r_p^c, r_s^c) \left(\frac{r_p^c}{(r_s^c)^2}\right) \frac{1}{r_s^c} + \left(\frac{1}{r_s^c}\right)^2 \sigma^2(r_p^c)}, \quad (4)$$



**Таблица 10.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x_1^c$	$2\sigma_{est}(x_1^c)$	$y_1^c$	$2\sigma_{est}(y_1^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11207	0.00083	0.01754	0.00022	85.721°	0.077°	0.44	0.16	0.18	0.26	2.3115	$8 \times 10^{-9}$
6250	0.1132	0.0020	0.01782	0.00050	85.62	0.17	0.50	0.37	0.16	0.60	0.52219	0.99997
6750	0.1120	0.0014	0.01759	0.00035	85.70	0.12	0.52	0.26	0.14	0.42	0.79144	0.96
7250	0.11144	0.00094	0.01748	0.00024	85.758	0.088	0.53	0.20	0.08	0.32	0.97038	0.70
7750	0.11189	0.00091	0.01754	0.00023	85.720	0.083	0.47	0.20	0.13	0.30	1.1150	0.37
8250	0.1125	0.0022	0.01754	0.00048	85.72	0.16	0.32	0.24	0.33	0.48	1.5210	0.0074
8750	0.1123	0.0010	0.01757	0.00026	85.704	0.094	0.42	0.23	0.14	0.35	1.0401	0.54
9250	0.1121	0.0013	0.01748	0.00036	85.74	0.12	0.34	0.26	0.23	0.41	1.0466	0.53
9750	0.1112	0.0013	0.01737	0.00034	85.79	0.12	0.41	0.33	0.10	0.49	1.2103	0.198
10250	0.1131	0.0044	0.0175	0.0012	85.71	0.29	0.05	0.43	0.65	0.45	0.66148	0.997

**Таблица 11.** Результаты интерпретации правой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x_1^c$	$2\sigma_{est}(x_1^c)$	$y_1^c$	$2\sigma_{est}(y_1^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11094	0.00053	0.017531	0.000095	85.781°	0.044°	0.86	0.20	-0.42	0.27	3.7576	0
6250	0.1113	0.0011	0.01794	0.00016	85.681	0.078	1.13	0.44	-0.78	0.58	1.1957	0.26
6750	0.11080	0.00089	0.01765	0.00014	85.761	0.070	1.01	0.33	-0.56	0.45	1.8492	$2.6 \times 10^{-4}$
7250	0.11115	0.00072	0.01754	0.00014	85.772	0.060	0.84	0.25	-0.33	0.35	2.5861	$1.27 \times 10^{-9}$
7750	0.11109	0.00069	0.01752	0.00013	85.776	0.058	0.85	0.25	-0.38	0.35	1.3392	0.089
8250	0.11076	0.00050	0.017623	0.000080	85.778	0.040	0.99	0.20	-0.61	0.27	0.99821	0.65
8750	0.11116	0.00069	0.01753	0.00012	85.761	0.056	0.85	0.27	-0.46	0.37	1.3138	0.11
9250	0.11083	0.00089	0.01731	0.00018	85.839	0.079	0.63	0.28	-0.16	0.40	1.1495	0.338
9750	0.1120	0.0024	0.01735	0.00061	85.78	0.21	0.31	0.44	0.26	0.73	1.5716	0.0089
10250	0.1124	0.0033	0.01736	0.00076	85.74	0.27	0.26	0.48	0.33	0.87	0.88100	0.86

где  $\mathbf{cov}(\dots)$  — операция нахождения ковариаций случайных величин. У нас ошибки получаются больше, чем в работе [6], поскольку в этой работе интерпретация проводилась только по геометрическим параметрам  $r_s, r_p, i$  при фиксированных коэффициентах потемнения к краю. В нашем же случае интерпретация проводится как по геометрическим параметрам, так и по коэффициентам

потемнения к краю, и большее число степеней свободы модели приводит к увеличению величины ошибок искомых параметров.

Как видно из рис. 3, намечается некоторое увеличение радиуса планеты с уменьшением длины волны. Этот эффект является значимым на уровне  $1\sigma$ . Однако если отложить ошибки на уровне  $2\sigma$ , то это увеличение является незначимым. Система-

**Таблица 12.** Результаты интерпретации совместно правой и левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{est}(i^c)$	$x_1^c$	$2\sigma_{est}(x_1^c)$	$y_1^c$	$2\sigma_{est}(y_1^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11210	0.00067	0.01760	0.00015	85.705°	0.058°	0.57	0.18	-0.02	0.27	5.5682	0
6250	0.11228	0.00094	0.01792	0.00017	85.637	0.072	0.85	0.33	-0.36	0.45	0.99780	0.608
6750	0.11183	0.00086	0.01768	0.00018	85.697	0.072	0.72	0.26	-0.15	0.37	1.5358	0.00013
7250	0.11156	0.00071	0.01756	0.00015	85.737	0.061	0.66	0.20	-0.10	0.29	1.9376	$8 \times 10^{-10}$
7750	0.11180	0.00072	0.01759	0.00015	85.716	0.061	0.63	0.21	-0.09	0.30	2.0992	$2.5 \times 10^{-12}$
8250	0.11201	0.00069	0.01764	0.00015	85.712	0.058	0.61	0.20	-0.10	0.29	2.2615	$5 \times 10^{-15}$
8750	0.11216	0.00077	0.01761	0.00016	85.695	0.065	0.58	0.24	-0.10	0.34	2.0344	$2.7 \times 10^{-11}$
9250	0.11174	0.00090	0.01743	0.00022	85.766	0.084	0.43	0.23	0.09	0.34	1.4995	$3 \times 10^{-4}$
9750	0.11105	0.00091	0.01736	0.00021	85.804	0.083	0.47	0.25	0.01	0.37	1.3637	0.0063
10250	0.1129	0.0023	0.01733	0.00073	85.74	0.18	0.00	0.35	0.72	0.38	0.77561	0.98971

**Таблица 13.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{\AA}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11212	0.00067	0.01754	0.00016	85.722°	0.061°	0.43	0.18	0.17	0.27
6750	0.1123	0.0020	0.01757	0.00047	85.71	0.18	0.51	0.48	0.13	0.73
7250	0.1116	0.0013	0.01747	0.00031	85.76	0.12	0.51	0.32	0.07	0.49
7750	0.1120	0.0013	0.01752	0.00028	85.72	0.11	0.45	0.32	0.08	0.48
8250	0.1126	0.0012	0.01754	0.00029	85.72	0.12	0.32	0.34	0.29	0.51
8750	0.1125	0.0014	0.01758	0.00030	85.69	0.12	0.41	0.37	0.09	0.54
9250	0.1122	0.0015	0.01745	0.00038	85.76	0.15	0.32	0.45	0.20	0.67
9750	0.1112	0.0018	0.01736	0.00039	85.80	0.16	0.43	0.39	0.13	0.62

тически большее значение радиуса экзопланеты в нашем случае (на 0.3%) по сравнению с данными работы [5] вызвано различием в способе нормировки кривой блеска и с тем, что в нашем случае коэффициент потемнения не фиксировался, а искался совместно с другими параметрами задачи.

Отметим в этой связи, что различие в радиусах планеты в системе HD 209458 для синих и красных лучей не является значимым [1]:  $\bar{r}_p = 0.0139 \pm 0.0003$  для  $\bar{\lambda} = 3750 \text{\AA}$  (среднее значение для трех длин волн:  $\lambda = 3201, 3750, 4300 \text{\AA}$ ) и  $\bar{r}_p =$

$= 0.0138 \pm 0.0002$  для  $\lambda = 8732 \text{\AA}$  (среднее значение для  $\lambda = 7755, 8732, 9708 \text{\AA}$ ); указаны ошибки на уровне  $2\sigma$ .

Рассмотрим теперь коэффициенты потемнения диска звезды к краю в линейном законе потемнения в зависимости от длины волны. На рис. 4–7 приведены зависимости наблюдаемых коэффициентов потемнения  $x$  от длины волны  $\lambda$ . Здесь же даны теоретические зависимости коэффициентов потемнения к краю в линейном законе от  $\lambda$ , приведенные в работах Кларе [2, 16] для фотометрических

**Таблица 14.** Результаты интерпретации левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{Å}$	$r_s$	$\Delta_M(r_s)$	$r_p$	$\Delta_M(r_p)$	$i$	$\Delta_M(i)$	$x_1$	$\Delta_M(x_1)$	$y_1$	$\Delta_M(y_1)$
6750	0.1150	0.0066	0.01785	0.00051	85.77°	0.41°	1.27	0.81	1.3	1.3
7250	0.1115	0.0022	0.01758	0.00039	85.77	0.21	0.63	0.40	0.23	0.62
7750	0.1118	0.0014	0.01756	0.00030	85.71	0.12	0.47	0.27	0.13	0.42
8750	0.1123	0.0018	0.01766	0.00036	85.69	0.17	0.51	0.36	0.28	0.55
9250	0.1121	0.0022	0.01762	0.00036	85.76	0.22	0.42	0.35	0.36	0.56
9750	0.1109	0.0018	0.01741	0.00040	85.77	0.14	0.39	0.40	0.073	0.64

**Таблица 15.** Результаты интерпретации правой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{Å}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11091	0.00070	0.01752	0.00016	85.782°	0.060°	0.87	0.18	-0.44	0.26
6250	0.1109	0.0028	0.01784	0.00064	85.73	0.22	1.27	0.69	-0.73	0.97
6750	0.1108	0.0019	0.01758	0.00043	85.77	0.16	1.02	0.44	-0.60	0.64
7250	0.1111	0.0014	0.01750	0.00037	85.78	0.13	0.85	0.37	-0.39	0.54
7750	0.1111	0.0013	0.01751	0.00030	85.78	0.11	0.87	0.33	-0.38	0.48
8250	0.1108	0.0012	0.01763	0.00027	85.778	0.098	1.01	0.29	-0.59	0.42
8750	0.1113	0.0015	0.01753	0.00032	85.76	0.12	0.85	0.38	-0.45	0.55
9250	0.1109	0.0016	0.01731	0.00041	85.84	0.16	0.66	0.45	-0.12	0.67
9750	0.1108	0.0020	0.01726	0.00043	85.85	0.18	0.55	0.53	-0.17	0.78

систем *ugriz* и *UBVRIJ*. Видно, что наблюдаемая зависимость  $x(\lambda)$  качественно согласуется с теоретической: наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  в среднем убывают с увеличением длины волны. Однако наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  систематически меньше по сравнению с теоретическими. Этот вывод качественно согласуется с результатами, полученными для системы HD 209458 [1, 4]. Однако ход наблюдаемой функции  $x(\lambda)$  отличается от зависимости  $x(\lambda)$ , полученной для системы HD 209458. Если в случае системы HD 209458 различие между наблюдаемыми и теоретическими значениями  $x(\lambda)$  монотонно нарастает с увеличением  $\lambda$ , то в случае системы HD 189733 это различие максимально для коротких длин волн и затем оно убывает в сторону

больших длин волн. Как следует из рис. 4 и 5, результаты интерпретации отдельно левой и правой части кривой блеска системы HD 189733, несмотря на систематический сдвиг по оси ординат этих кривых блеска, согласуются между собой. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наши результаты по анализу потемнения звезды к краю устойчивы по отношению к влиянию систематических ошибок в кривой блеска в системе HD 189733.

Качественно иной вид функции  $x(\lambda)$  для системы HD 189733 по сравнению с системой HD 209458 может быть связан с тем, что на поверхности звезды в системе HD 1839733 в момент ее наблюдения имелись пятна [5, 6]. Поэтому дальнейшие наблюдения системы HD 189733 в

**Таблица 16.** Результаты интерпретации совместно правой и левой ветви наблюдаемых кривых блеска из работы [6] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. (Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ )

$\lambda, \text{Å}$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11182	0.00048	0.01757	0.00011	85.724°	0.042°	0.60	0.12	-0.09	0.18
6250	0.1124	0.0021	0.01790	0.00047	85.64	0.17	0.88	0.53	-0.35	0.76
6750	0.1119	0.0014	0.01765	0.00031	85.71	0.12	0.71	0.34	-0.16	0.50
7250	0.11160	0.00095	0.01755	0.00023	85.741	0.085	0.65	0.24	-0.12	0.36
7750	0.11183	0.00091	0.01758	0.00019	85.718	0.075	0.62	0.23	-0.10	0.34
8250	0.11204	0.00085	0.01763	0.00019	85.714	0.072	0.61	0.22	-0.11	0.32
8750	0.11219	0.00100	0.01760	0.00021	85.697	0.082	0.58	0.27	-0.10	0.38
9250	0.1118	0.0011	0.01743	0.00028	85.77	0.11	0.45	0.33	0.12	0.48
9750	0.1111	0.0013	0.01735	0.00027	85.81	0.11	0.48	0.35	0.01	0.51

периоды ее меньшей активности представляют большой интерес. Следует подчеркнуть, что, хотя наблюдаемые зависимости  $x(\lambda)$  для систем HD 189733 и HD 209458 качественно различны, для обеих систем наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  в среднем меньше теоретических. Этот вывод имеет существенное значение для проверки современных моделей тонких звездных атмосфер.

## 6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВЫХ БЛЕСКА В РАМКАХ КВАДРАТИЧНОГО ЗАКОНА ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ

Результаты интерпретации кривых блеска в рамках квадратичного закона потемнения к краю приведены в табл. 10–16. В табл. 10–12 даны результаты, полученные в рамках метода дифференциальных поправок. Здесь приведены центральные значения параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  и их ошибки на уровне  $2\sigma$  (уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ ). Также в табл. 10–12 приведены значения  $\chi^2_{red}$  и  $\alpha_0$ . В случае интерпретации левой и правой ветвей кривых блеска (табл. 10 и 11 соответственно) значения приведенного хи-квадрат  $\chi^2_{red}$  и критического уровня значимости  $\alpha_0$  для некоторых длин волн  $\chi^2_{red} < 1$  и  $\alpha_0 > 0.5$ , что свидетельствует о скоррелированности наблюдаемых значений блеска и наличии в наблюдательных данных систематических ошибок. В случае интерпретации всей кривой блеска (табл. 12) для большинства длин волн наша модель оказывается “плохой”, и она отвергается на весьма низком уровне значимости.

В случае кривых блеска на  $\lambda = 6250 \text{ Å}$  и  $\lambda = 10250 \text{ Å}$  величины  $\chi^2_{red} \leq 1$  и  $\alpha_0 > 0.5$ , что свидетельствует о сильной скоррелированности наблюдательных точек. Все перечисленные обстоятельства вынуждают нас и в случае модели с квадратичным законом потемнения к краю брать в качестве оценки ошибок искомым параметров величину  $2\sigma_{est}$ , а не  $\sigma_{est}$ .

В табл. 13, 15, 16 приведены результаты интерпретации кривой блеска HD 189733 в рамках модели с квадратичным законом потемнения; при этом ошибки параметров оценены методом доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . В табл. 14 даны результаты интерпретации левой ветви кривых блеска в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  (уровень доверия  $\gamma = 0.955$ ).

## 7. ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ДЛИНЫ ВОЛНЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ $x_1$ И $y_1$ В КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ

На рис. 8–13 приведена зависимость наблюдаемых значений  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  от длины волны, полученных методом дифференциальных поправок. Ошибки приведены на уровне  $2\sigma$  (уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ ). Здесь также даны теоретические зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные в работах [2, 16].

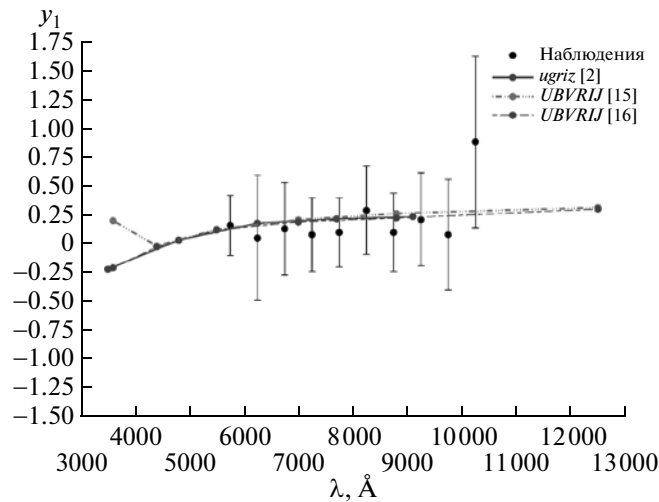


Рис. 11. То же, что на рис. 8, для квадратичного коэффициента  $y_1$ .

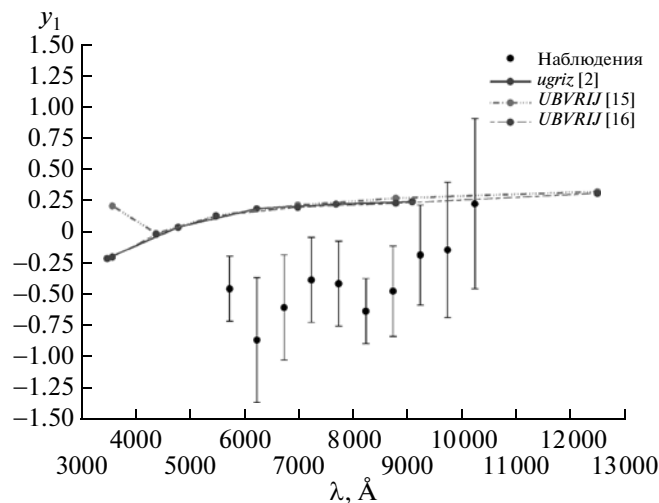


Рис. 12. То же, что на рис. 11, на основе анализа правой ветви кривых блеска.

Видно, что наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по левой ветви кривой блеска, согласуется с теоретической зависимостью  $x_1(\lambda)$ , в то время как наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по правой ветви кривой блеска, лежит существенно выше теоретической (рис. 8 и 9 соответственно). Наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по всей кривой блеска, в пределах ошибок определения (на уровне  $2\sigma$ ) удовлетворительно согласуется с теоретической зависимостью.

Наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по левой ветви кривой блеска, согласуется с теоретической зависимостью, в то время как наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по правой ветви

кривой блеска, значительно отличается от теоретической и лежит существенно ниже. Наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по всей кривой блеска, в пределах ошибок определения (на уровне  $2\sigma$ ), удовлетворительно согласуется с теоретической зависимостью (рис. 11–13).

Подчеркнем, что если бы мы взяли ошибки параметров на уровне  $1\sigma$ , то можно было бы сделать вывод, что наблюдаемые зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные по всей кривой блеска, не согласуются с теоретическими: наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$  лежит систематически выше теоретической, а зависимость  $y_1(\lambda)$  — ниже теоретической зависимости (рис. 10 и 13). Однако, поскольку

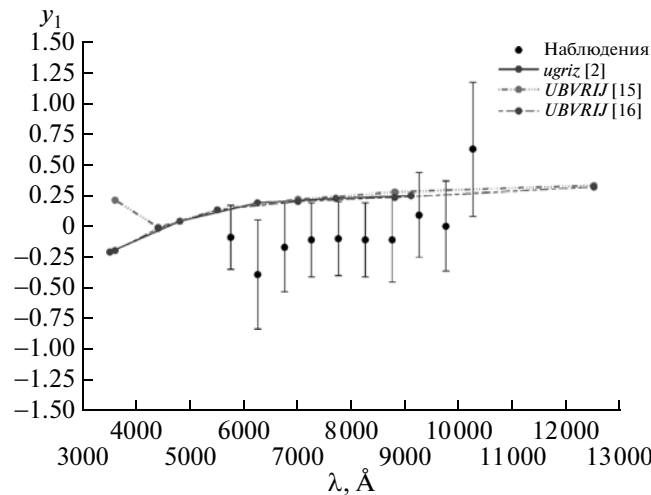


Рис. 13. То же, что на рис. 11, на основе анализа совместно левой и правой ветви кривых блеска.

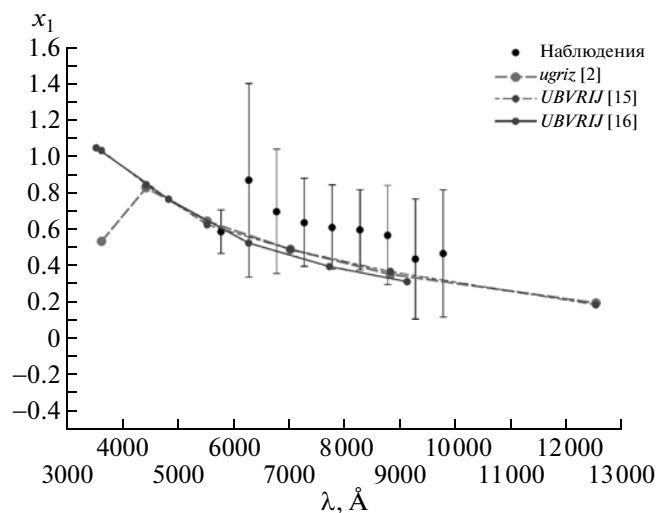


Рис. 14. То же, что на рис. 10, в случае, когда ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ .

наша модель оказалась “плохой” и, кроме того, наша модель является не однопараметрической, а содержит 5 искоемых параметров, мы вынуждены брать ошибки на уровне  $2\sigma$ . При таких значениях ошибок определения коэффициентов  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  указанные отличия наблюдаемых зависимостей  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  не являются значимыми. На рис. 14, 15 приведены зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные из интерпретации левой и правой ветвей кривой блеска, на которых ошибки получены методом доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ .

На рис. 16, 17 приведены проекции доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и  $\chi^2_M$  на плоскости  $(r_s, r_p)$  и  $(x_1, y_1)$ . Использовалась кривая блеска  $\lambda = 9500-10000 \text{ \AA}$  (левая ветвь). Применялась модель с квадратичным законом потемнения к краю.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе анализа высокоточных многоцветных кривых блеска, полученных в работах [5, 6] для системы с экзопланетой HD 189733, мы определили

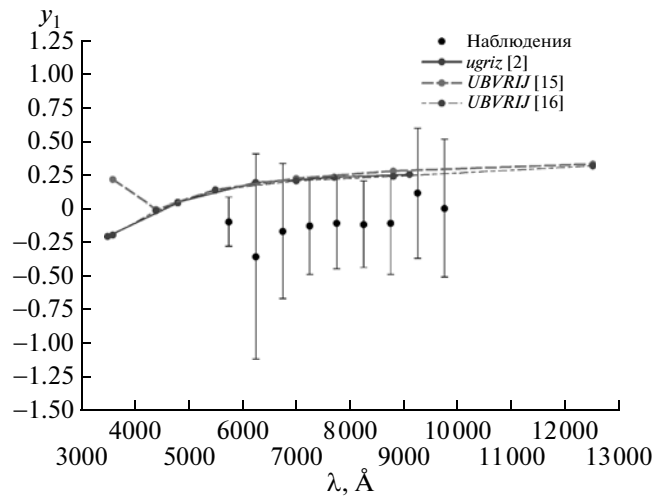


Рис. 15. То же, что на рис. 14, для квадратичного коэффициента  $y_1$ .

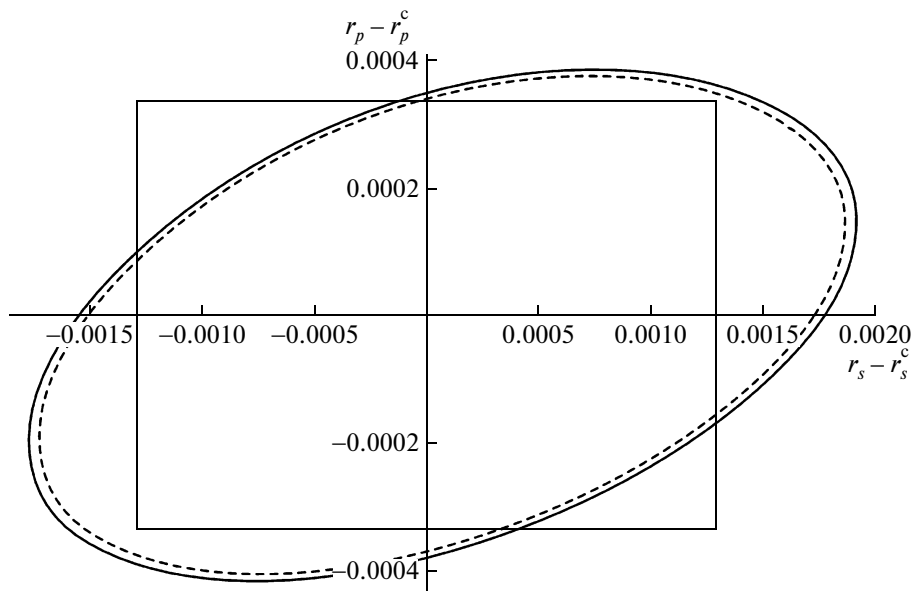


Рис. 16. Проекция доверительной области (уровень доверия  $\gamma = 0.955$ ) в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  (штриховая линия) и  $\chi_M^2$  (сплошная линия) на плоскость параметров  $r_s, r_p$  при квадратичном законе потемнения к краю для левой ветви кривой блеска в диапазоне длин волн  $\lambda = 9500 - 10\,000 \text{ \AA}$ . Стороны прямоугольника соответствуют интервалам ошибок на уровне  $2\sigma$ , полученным в рамках метода дифференциальных поправок.

радиусы звезды и планеты, наклонение орбиты, а также коэффициенты в линейном и квадратичном законах потемнения к краю по диску звезды K2V. Результаты нашей интерпретации согласуются с результатами, полученными в [5, 6].

Особое внимание мы уделили исследованию потемнения к краю звезды K2V, проведя тщательный анализ ошибок определения коэффициентов в линейном и квадратичном законах потемнения

к краю. Принимая во внимание наличие пятен на поверхности звезды K2V [6], мы проанализировали отдельно левую и правую ветви кривых блеска, а также всю кривую блеска, уделив особое внимание проверке адекватности нашей модели наблюдательным данным. Оказалось, что наша модель является “плохой”. При интерпретации отдельно левой и правой ветвей кривой блеска наша модель для ряда длин волн отвергается на очень высоком

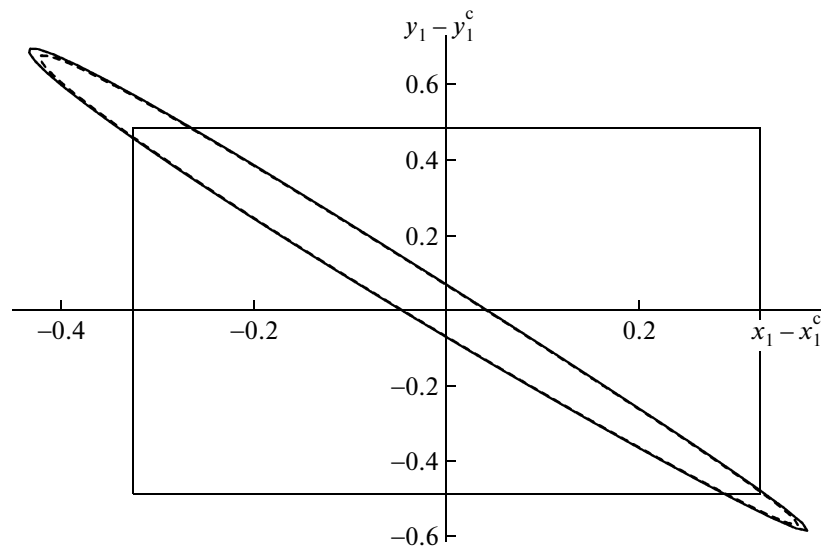


Рис. 17. То же, что на рис. 16, для проекции доверительной области на плоскость параметров  $x_1, y_1$ .

уровне значимости  $\alpha_0 > 50\%$ , что, скорее всего, означает наличие скоррелированности отдельных наблюдательных точек на кривой блеска, а при интерпретации всей кривой блеска наша модель для большинства длин волн отвергается на очень низком уровне значимости.

Поскольку наша модель в применении к системе HD 189733 оказалась “плохой”, мы при оценке ошибок параметров вынуждены брать высокий уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$  (а не  $68\%$ , что можно брать для “хороших” моделей). Также ввиду того, что наша модель является не однопараметрической, а содержит 4 или 5 искомых параметров, при использовании методов доверительных областей мы указываем интервалы ошибок, которые содержат истинные значения искомых параметров с вероятностью заведомо больше заданной (в данном случае заданный уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$  относится не к отдельному доверительному интервалу, а ко всей доверительной области D). Анализ полученных нами наблюдательных зависимостей коэффициентов потемнения к краю  $x(\lambda), x_1(\lambda), y_1(\lambda)$  при выбранном уровне доверия  $\gamma = 95.5\%$  привел к следующим выводам:

1. Наблюдаемые значения коэффициента в линейном законе потемнения к краю  $x(\lambda)$  для системы HD 189733 получаются систематически ниже теоретических, причем это различие нарастает с уменьшением длины волны  $\lambda$  (а не с увеличением  $\lambda$ , как это имеет место в системе HD 209458). Наблюдаемые зависимости коэффициентов в квадратичном законе потемнения к краю  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  от длины волны в пределах ошибок определения

(при  $\gamma = 95.5\%$ , на уровне  $2\sigma$ ) удовлетворительно согласуются с теоретическими зависимостями, следующими из модели одномерных тонких звездных атмосфер [2, 3, 16].

Следует подчеркнуть, что эти выводы относятся к кривым блеска системы HD 189733, когда на диске звезды K2V наблюдались пятна. Для дальнейшего исследования потемнения к краю в случае этой звезды необходимо получить дополнительные наблюдательные данные по кривым затмения в моменты, когда вклад пятен будет пренебрежимо мал.

Мы также подтвердили (на уровне “ $1\sigma$ ”) возрастание радиуса экзопланеты с уменьшением длины волны, обнаруженное в работе [5]). Это может свидетельствовать о наличии у экзопланеты атмосферы.

Авторы выражают особую благодарность Фредерику Понту (F. Pont) за предоставление наблюдательных данных по HD 189733. Выражаем благодарность за финансовую поддержку работы грантом Российского фонда фундаментальных исследований 08-02-01220, грантом Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-7179.2010.2, грантом Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых-кандидатов наук МК-206.2009.2 и грантом аналитической ведомственной целевой программы “Развитие научного потенциала высшей школы” РНП 2.1.1.2906.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, Астрон. журн. **87**, 1199 (2010).



2. A. Claret, *Astron. and Astrophys.* **428**, 1001 (2004).
3. A. Claret, *Astron. and Astrophys.* **506**, 1335 (2009).
4. J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **386**, 1644 (2008).
5. F. Pont, R. L. Gilliland, C. Moutou, *et al.*, *Astron. and Astrophys.* **476**, 1347 (2007).
6. F. Pont, H. Knutson, R. L. Gilliland, *et al.*, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **385**, 109 (2008).
7. F. Bouchy, S. Udry, M. Mayor, *et al.*, *Astron. and Astrophys.* **444**, 15 (2005).
8. P. P. Eggleton, *Astrophys. J.* **268**, 368 (1983).
9. И. Кудзей, *Астрон. циркуляр № 1363* (1985).
10. S. Kasuya, M. Honda, and R. Mishima, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **411**, 1863 (2011).
11. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **85**, 121 (2008).
12. М. К. Абубекеров, Н. Ю. Гостев, А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **86**, 778 (2009).
13. D. M. Popper, *Astron. J.* **89**, 132 (1984).
14. А. М. Черепашук, *Астрон. журн.* **70**, 1157 (1993).
15. A. Claret, *Astron. and Astrophys.* **335**, 647 (1998).
16. A. Claret, *Astron. and Astrophys.* **363**, 1081 (2000).