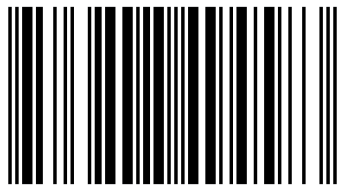


В последние годы, благодаря космическим обсерваториям HST, CoRoT, Kepler получены уникальные по точности транзитные (затменные) кривые блеска двойных звёздных систем с экзопланетами. Транзитная кривая блеска содержит в себе уникальную информацию о радиусе экзопланеты, радиусе звезды и наклоне плоскости орбиты к земному наблюдателю. Анализ транзитной кривой блеска позволяет получить не только геометрические параметры двойной системы, но и коэффициенты потемнения к краю звёздного диска, в которых косвенным образом содержится информация о распределении температуры в фотосфере звезды. В данной работе подробно изложен алгоритм интерпретации кривой блеска. Представлены результаты апробации алгоритма на основе анализа кривой блеска классической затменной звездной системы YZ Cas. Приведены результаты интерпретации транзитных кривых блеска двойных систем с экзопланетами HD 209458, HD 189733, Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b. Для двойных систем HD 209458 и HD 189733 получена зависимость искомых параметров от длины волны фотометрического фильтра в предположении линейного и квадратичного закона потемнения диска звезды к краю. Подтверждено наличие атмосферы у экзопланеты HD 189733b.

**Н. Гостев, М. Абубекеров, А. Черепашук**

Гостев Николай Юрьевич, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Государственного астрономического института имени П.К.Штернберга МГУ имени М.В.Ломоносова (ГАИШ МГУ), Абубекеров Марат Керимович, кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник ГАИШ МГУ, Черепашук Анатолий Михайлович, академик РАН, директор ГАИШ МГУ.



978-3-8484-9458-3

Н. Гостев, М. Абубекеров, А. Черепашук

# Двойные звёздные системы с экзопланетами

Анализ транзитных кривых блеска

**Н. Гостев, М. Абубекеров, А. Черепашук**  
**Двойные звёздные системы с экзопланетами**



**Н. Гостев, М. Абубекеров, А. Черепашук**

**Двойные звёздные системы с  
экзопланетами**

**Анализ транзитных кривых блеска**

**LAP LAMBERT Academic Publishing**

## **Impressum/Imprint (nur für Deutschland/only for Germany)**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG  
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland  
Telefon +49 681 3720-310, Telefax +49 681 3720-3109  
Email: [info@lap-publishing.com](mailto:info@lap-publishing.com)

ДА: Москва, Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова, 2012

Herstellung in Deutschland:  
Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin  
Books on Demand GmbH, Norderstedt  
Reha GmbH, Saarbrücken  
Amazon Distribution GmbH, Leipzig  
ISBN: 978-3-8484-9458-3

## **Только для России и стран СНГ**

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Изображение на обложке предоставлено: [www.ingimage.com](http://www.ingimage.com)

Издатель: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG  
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany  
Telefon +49 681 3720-310, Факс +49 681 3720-3109  
Email: [info@lap-publishing.com](mailto:info@lap-publishing.com)

Напечатано в России  
ISBN: 978-3-8484-9458-3

АВТОРСКОЕ ПРАВО ©2012 принадлежат автору и LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG и лицензиарам  
Все права защищены. Saarbrücken 2012





# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Модель классической двойной системы и двойной системы с экзопланетой</b>	<b>5</b>
1.1 Описание модели . . . . .	5
1.2 Расчёт кривой блеска . . . . .	7
<b>2 Оценка ошибок</b>	<b>17</b>
2.1 Линейная модель и метод наименьших квадратов . . . . .	17
2.2 Нелинейная модель и метод дифференциальных поправок . . . . .	20
2.3 Метод Монте-Карло . . . . .	22
2.4 Метод доверительных областей . . . . .	22
2.5 Применение методов нахождения ошибок к кривой блеска на примере двойной звёздной системы YZCas . . . . .	27
2.6 Соотношение между интервалами ошибок, полученными разными методами . . . . .	36
<b>3 Многоцветные кривые затмения системы HD209458</b>	<b>56</b>
3.1 Система HD209458 . . . . .	56
3.2 Интерпретация затменной системы звезды и экзопланеты . . . . .	57
3.3 Наблюдательный материал . . . . .	59
3.4 Интерпретация кривых блеска HD209458 в рамках линейного закона потемнения . . . . .	60
3.5 Интерпретация кривых блеска HD209458 в рамках квадратичного закона потемнения . . . . .	77
3.6 Применение приближенного метода оценки "внешних" ошибок параметров . . . . .	80
3.7 Выводы относительно системы HD209458 . . . . .	84
<b>4 Анализ кривых блеска систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b</b>	<b>89</b>
4.1 Используемая модель . . . . .	89
4.2 Наблюдательный материал . . . . .	90
4.3 Интерпретация кривых блеска Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в рамках квадратичного закона потемнения . . . . .	96



<b>5</b>	<b>Интерпретация кривых блеска HD189733 в рамках линейного и квадратичного закона потемнения</b>	<b>103</b>
5.1	Наблюдательный материал . . . . .	103
5.2	Метод интерпретации . . . . .	105
5.3	Зависимость от длины волны радиуса планеты и коэффициента потемнения к краю звезды в предположении линейного закона . . . . .	109
5.4	Зависимость от длины волны коэффициентов $x_1$ и $y_1$ в предположении квадратичного закона потемнения . . . . .	119
	<b>Заключение</b>	<b>130</b>

# Введение

В последние годы, благодаря космическим миссиям (HST, CoRoT, Kepler) получены уникальные по точности кривые блеска затмения звезд экзопланетами (см. например [1]-[4]). В связи с запуском в марте 2009 года космического телескопа Kepler высокоточные наблюдательные данные покрытий звезд экзопланетами приобретают массовый характер [5]. Предполагаемый список объектов Kepler Input Catalog (KIC) составляет 50000 объектов [5]. Точность фотометрических данных достигает  $10^{-4} - 10^{-5}$  относительной интенсивности. Столь огромный массив высокоточных данных позволяет ставить новые задачи, а прежние решать на качественно ином уровне.

Фотометрический материал полученный обсерваториями Kepler, Corot, HST, а именно транзитные кривые блеска уже позволили определить радиусы звезд и экзопланет более чем в ста пятидесяти двойных систем (см. например каталог Interactive Extra-solar Planets Catalog [6]). Анализ кривой блеска HD 209458, полученной на HST в 2000 году, выполнен в работе Брауна и др. [1]. Анализ многоцветных кривых блеска HD 209458, полученных на HST в 2003 году выполнен в работе Кнутсона и др. [2]. В обеих работах были получены радиусы экзопланеты и звезды, наклонение орбиты и коэффициенты потемнения к краю для звезды. Наиболее детальное исследование данных рядов наблюдений с HST выполнил Соуворз [7]. Автор [7] получил значения радиусов экзопланеты и звезды, наклонение орбиты, а также значения коэффициентов потемнения к краю для звезды в различных законах потемнения.

Однако, в ряде случаев упускается из виду, что анализ транзитной кривой блеска позволяет получить не только геометрические параметры системы (радиусы звезды и экзопланеты, наклонение орбиты), но и получить информацию о потемнении звездного диска к краю. Двойная система с экзопланетой в этом отношении является идеальным лабораторным стендом позволяющим детально исследовать поверхностную структуру звезды. Вплоть до того, что можно восстановить распределение пятен на поверхности звезды [8]. Кроме того, часто оказывается, что результаты, полученные из анализа кривых блеска для различных эпох наблюдений, а также значения геометрических параметров для разных длин волн не вполне согласуются между собой в пределах своих ошибок.

В данной работе проводится статистический анализ транзитных кривых блеска двойных звездных систем с целью получения коэффициентов потемнения диска звезды к краю. В работах [9, 10, 11] проведен анализ наблюдательных данных указанных двойных систем, однако авторы выполнили интерпретацию кривых блеска при фиксированных коэффициентах потемнения к краю. В данной работе помимо определения геометрических параметров двойной системы исследован вопрос

потемнения диска звезды к краю в предположении линейного и квадратичного закона потемнения.

При этом анализ наблюдательных данных проведен на основе метода доверительных областей, который позволяет проверить адекватность модели и указать на основе конкретной реализации наблюдательных данных консервативные (внешние) ошибки искомых параметров, а также позволяет судить о надежности интерпретации наблюдательных данных в рамках используемой модели [12].

# Глава 1

## Модель классической двойной системы и двойной системы с экзопланетой

### 1.1 Описание модели

Рассмотрим модель двух сферических звезд с тонкими атмосферами на круговой орбите без эффектов взаимной близости компонент. Такая модель легко реализуется на современных компьютерах и дает возможность выполнить большое число вариантов решения обратной задачи за сравнительно малое компьютерное время. Модель сферических звезд для двойной системы физически обоснована когда как степень заполнения полости Роша мала  $\mu < 0.5$ . Такая модель не потеряла своего значения в связи с открытием затмений звёзд внесолнечными планетами (экзопланетами). В рассматриваемой модели рассматривалось движение дисков звезд в проекции на картинную плоскость, то есть плоскость перпендикулярную лучу зрения. На рис.1.1 показана геометрия дисков звезд во время затмения. Здесь  $r_1, r_2$  – радиусы первой и второй звезды (или радиус звезды и радиус планеты),  $\Delta$  – расстояние между центрами дисков звезд,  $\rho, \Psi$  – полярные координаты произвольной точки поверхности диска первой звезды (начало координат расположено в геометрическом центре диска). Расстояние между центрами дисков звезд задается выражением

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta, \quad (1.1)$$

(см. например работу [14]), в котором  $i$  – наклонение орбиты двойной системы,  $\theta$  – значение текущего орбитального фазового угла.

В качестве функций распределения яркости по диску каждой звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска:

$$I(\rho) = I_0 \left( 1 - x + x \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right), \quad (1.2)$$

и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения

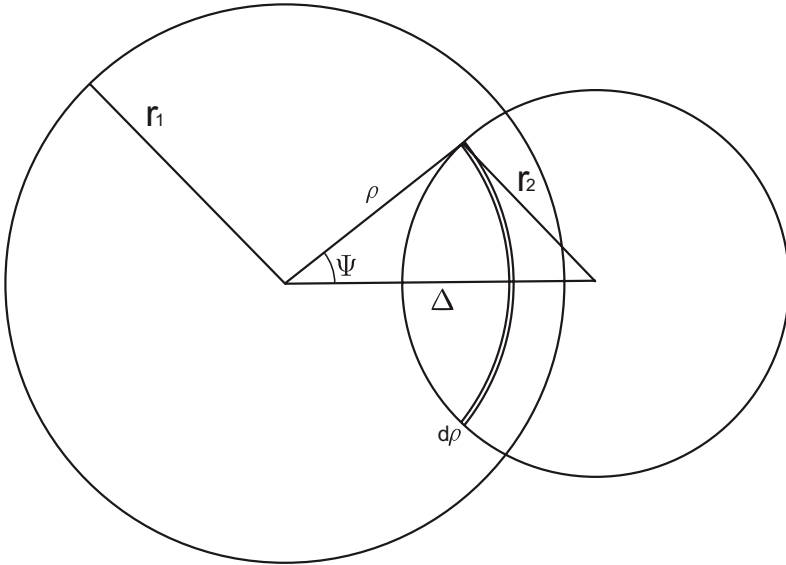


Рис 1.1: Модель двух затменных сферических звезд. Проекция на картинную плоскость. Здесь меньшая компонента – звезда или экзопланета.

к краю  $y$ :

$$I(\rho) = I_0 \left( 1 - x \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right) - y \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right)^2 \right), \quad (1.3)$$

Здесь  $\rho$  – полярное расстояние от центра диска звезды,  $r$  – радиус диска звезды,  $x$  и  $y$  – линейный и квадратичный коэффициенты потемнения к краю соответственно. Обозначим  $I_0^{(1)}$ ,  $I_0^{(2)}$  – яркости в центрах дисков первой и второй звезды,  $x_1$ ,  $x_2$  – коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезды,  $y_1$ ,  $y_2$  – квадратичные коэффициенты потемнения к краю первой и второй звезды. Искомыми параметрами модели двух звёзд являются:  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i$ ,  $I_0^{(1)}$ ,  $I_0^{(2)}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ , а в случае нелинейного закона потемнения к краю – также и  $y_1$ ,  $y_2$ . Единицей длины в наших моделях является расстояние между центрами звезд (звезды и планеты)  $a = 1$ . "Третий свет" в модели отсутствует. Кривая блеска двойной системы в данной модели определяется следующими тремя уравнениями:

1. Суммарная светимость компонент, описывающая внезатменный блеск:

$$2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho + 2\pi \int_0^{r_2} I^{(2)}(\xi) \xi d\xi = L^{full}. \quad (1.4)$$

2. Потеря блеска системы, обусловленная затмением звездой большего радиуса спутника с меньшим радиусом

$$L^{full} - L^{(1)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(2)}(\xi) dS, \quad (1.5)$$

где  $S(\Delta)$  – площадь области перекрытия дисков.

3. Потеря блеска, обусловленная затмением звездой меньшего радиуса спутника с большим радиусом:

$$L^{full} - L^{(2)}(\theta) = \iint_{S(\Delta)} I^{(1)}(\rho) dS. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1), (1.4), (1.5) и (1.6) полностью описывают наблюдаемую кривую блеска и содержат, в зависимости от рассматриваемой модели, набор параметров из числа:  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i$ ,  $I_0^{(1)}$ ,  $I_0^{(2)}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ . Подставляя под знаки интегрирования функции распределения яркости, аппроксимированные соответствующим законом потемнения к краю (1.2) и выполняя интегрирование, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно соответствующих параметров.

## 1.2 Расчёт кривой блеска

При работе использовался иной в сравнении с принятым (см., например, работу [15]) подход к расчету области перекрытия дисков, позволяющий получить выражение для падения блеска независимо от соотношения между радиусами  $r_1$ ,  $r_2$  и расстоянием между центрами компонент двойной системы  $\Delta$ . Этот подход

позволяет унифицировать расчетные формулы и не рассматривать каждый случай затмения в отдельности. При этом в 7 раз сокращается количество уравнений и, соответственно, время расчетов. Подробный вывод изложен ниже.

Введём новые параметры в выражении (1.2) для линейного закона потемнения к краю.

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= I_0(1-x) \\ X_1 &= I_0 x \end{aligned} \right\}, \quad (1.7)$$

тогда (1.2) запишется как:

$$I(\rho) = \left( X_0 + X_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} \right). \quad (1.8)$$

Также введём новые параметры в выражении (1.3) для квадратичного закона потемнения к краю:

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= I_0(1-x-2y) \\ X_1 &= I_0(x+2y) \\ X_2 &= I_0 y \end{aligned} \right\}, \quad (1.9)$$

тогда (1.3) запишется как:

$$I(\rho) = \left( X_0 + X_1 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2}} + X_2 \frac{\rho^2}{r^2} \right), \quad (1.10)$$

В таких переменных яркость в точке диска звезды для квадратичного закона потемнения к краю отличается от соответствующей яркости для линейного закона потемнения к краю дополнительным слагаемым, содержащим  $X_2$ . Это позволяет нам получать модель с линейным законом потемнения к краю фиксируя параметр  $X_2 = 0$  модели с квадратичным законом потемнения к краю. Компонент 1 в орбитальной фазе  $\theta = 0$ , затмевает компонент 2.

Полный блеск звезды в модели с линейным законом потемнения к краю:

$$L^{(s)} = 2\pi \int_0^r I^{(s)}(\rho) \rho d\rho = X_0^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{2}{3} X_1^{(s)} \pi r_s^2, \quad s = 1, 2 \quad (1.11)$$

где индекс  $s$  – номер компонента, к которому относится снабжённый им параметр.

Аналогично, полный блеск звезды в модели с квадратичным законом потемнения к краю:

$$L^{(s)} = 2\pi \int_0^r I^{(s)}(\rho) \rho d\rho = X_0^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{2}{3} X_1^{(s)} \pi r_s^2 + \frac{1}{2} X_2^{(s)} \pi r_s^2, \quad s = 1, 2. \quad (1.12)$$

Модель системы звезды и планеты может быть получена приравниванием нулю параметров  $X_{0,1,2}^{(2)}$ , то есть относящихся ко второму компоненту.

Полный блеск системы двух звёзд в нелинейной модели вне затмения:

$$L^{full} = L^{(1)} + L^{(2)} = X_0^{(1)} \pi r_1^2 + \frac{2}{3} X_1^{(1)} \pi r_1^2 + \frac{1}{2} X_2^{(1)} \pi r_1^2 + X_0^{(2)} \pi r_2^2 + \frac{2}{3} X_1^{(2)} \pi r_2^2 + \frac{1}{2} X_2^{(2)} \pi r_2^2. \quad (1.13)$$

Для универсализации внешнего вида расчетных формул получим общее выражение для падения блеска при затмении одной звезды другой при произвольном произвольных радиусах звёзд и произвольном расстоянии между их центрами. Затмевающему компоненту (ближний компонент по отношению к земному наблюдателю) и соответствующим ему параметрам приписан индекс  $n$ , затмеваемому компоненту (дальний компонент по отношению к земному наблюдателю) и соответствующим ему параметрам – индекс  $f$ . Тогда при непосредственном расчете минимумов кривой блеска остаётся лишь в диапазоне значений орбитальной фазы  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  (или  $\cos \theta > 0$ ) подставить вместо индекса  $n$  индекс 1, вместо индекса  $f$  индекс 2, а диапазоне значений орбитальной фазы  $\cos \theta < 0$  наоборот – подставить вместо индекса  $f$  индекс 1, вместо индекса  $n$  индекс 2.

В указанных обозначениях падение блеска при затмении (при фиксированных коэффициентах потемнения к краю) описывается выражением:

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \iint_{S(\Delta)} I^{(f)}(\rho) dS, \quad (1.14)$$

где  $\rho$  – расстояние до центра диска затмеваемой звезды,  $\Delta$  – расстояние между центрами дисков,  $S(\Delta)$  – область перекрытия дисков, а вид  $I^{(f)}(\rho)$  определяется выражением (1.8) для модели с линейным законом потемнения к краю и выражением (1.10) для модели с квадратичным законом потемнения к краю.

Для вычисления интеграла (1.14) введем функции:

$$A x \equiv \begin{cases} \pi, & x < -1 \\ \arccos x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (1.15)$$

и

$$Q x \equiv \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{d A x}{d x} = Q \left( \frac{1}{1-x^2} \right) \quad (1.16)$$

Введем полярную систему координат с началом в центре диска затмеваемой звезды и полярным углом  $\varphi$ , отсчитываемым в направлении от центра диска затмеваемого компонента "f" к центру диска затмевающего компонента "n" (см.



рис.1.1). В этих координатах область интегрирования  $S(\Delta)$  задается как:

$$S(\Delta) = \begin{cases} \rho < r_f \\ -\pi < \varphi \leq \pi \\ \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \leq \cos \varphi. \end{cases} \quad (1.17)$$

При интегрировании в (1.14) по координате  $\varphi$  при тех значениях  $\rho$ , для которых выполняется неравенство  $\left| \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right| \leq 1$

$$\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \leq \cos \varphi \Leftrightarrow |\varphi| \leq \arccos \left( \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right).$$

Следовательно, интегрирование по  $\varphi$  тогда производится в пределах от  $-\arccos \left( \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right)$  до  $\arccos \left( \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} \right)$

При тех значениях  $\rho$ , для которых  $\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} < -1$  неравенство

$$\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} < \cos \varphi$$

выполняется при любом  $\varphi$ . В этом случае интегрирование по  $\varphi$  выполняется от  $-\pi$  до  $\pi$ .

При тех значениях  $\rho$ , для которых  $\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_n^2}{2\rho\Delta} > 1$ , последнее из неравенств (1.17) не выполняется ни при каких значениях  $\varphi$  (т.е. ни одна точка с таким значением  $\rho$  не принадлежит области интегрирования). При таких значениях  $\rho$  оба предела интегрирования по  $\varphi$  положим равными нулю.

Далее, используя обозначение (1.15) и вводя функцию

$$\Psi(\Delta, x, y) \equiv \mathcal{A} \left( \frac{x^2 + \Delta^2 - y^2}{2x\Delta} \right),$$

интеграл в выражении (1.14) можно переписать как:

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \int_0^{r_f} \rho d\rho \int_{-\Psi(\Delta, \rho, r_n)}^{\Psi(\Delta, \rho, r_n)} d\varphi I^{(f)}(\rho) = 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) I^{(f)}(\rho) d\rho, \quad (1.18)$$

Для модели с линейным законом потемнения к краю (1.8), подставив в (1.18) функцию  $I^{(f)}$  соответствующего вида (с параметрами для затмеваемого компонента "f"), получим такой вид зависимости падения блеска от параметров модели:

$$L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}) = X_0^{(f)} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_1^{(f)} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n). \quad (1.19)$$

Для модели с квадратичным законом потемнения к краю (1.10) аналогично получим:

$$\begin{aligned} L^{dec}(\Delta, r_f, r_n, X_0^{(f)}, X_1^{(f)}, X_2^{(f)}) = \\ = X_0^{(f)} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_1^{(f)} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + X_2^{(f)} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Тут  $L_0^{dec}$ ,  $L_1^{dec}$  и  $L_2^{dec}$  – некоторые функции.

Используя (1.16) при интегрировании по частям, можно получить:

$$\begin{aligned} L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) d\rho = \\ = \Psi(\Delta, r_f, r_n) r_f^2 + \Psi(\Delta, r_n, r_f) r_n^2 - \frac{1}{2} Q(\Delta, r_f, r_n), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\text{где } Q(\Delta, r_f, r_n) \equiv \Omega \left( (r_f^2 - (\Delta - r_n)^2) ((\Delta + r_n)^2 - r_f^2) \right)$$

и

$$L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = 2 \int_0^{r_f} \rho \Psi(\Delta, \rho, r_n) \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_f^2}} d\rho = \int_0^{r_f^2} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) \sqrt{1 - \frac{\rho}{r_f^2}} d\rho \quad (1.22)$$

(последнее равенство получено заменой  $\rho' = \rho^2$ , а далее во избежание излишних новых обозначений  $\rho'$  заменена на  $\rho$ ). Интеграл (1.22) находится численно (ниже будет показано, как он может быть выражен через эллиптические интегралы).

$$\begin{aligned} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n) = \frac{2}{r_f^2} \int_0^{r_f} \rho^3 \Psi(\Delta, \rho, r_n) d\rho = \\ = \Psi(\Delta, r_f, r_n) \frac{r_f^2}{2} + \frac{r_n^2}{2r_f^2} (2\Delta^2 + r_n^2) \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{1}{8r_f^2} (\Delta^2 + 5r_n^2 + r_f^2) Q(\Delta, r_f, r_n). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Для круговой орбиты расстояние между центрами дисков звезд  $\Delta$  зависит от фазы и угла наклона орбиты как:

$$\Delta(\theta, i) = \sqrt{\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta}. \quad (1.24)$$

В модели с линейным законом потемнения к краю блеск двойной системы зависит от фазы как:

$$\begin{aligned} L(\theta, i, r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = \\ = L^{full} - \begin{cases} L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}), & \cos \theta < 0 \\ L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}), & \cos \theta > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.25)$$

а в модели с квадратичным законом потемнения к краю как

$$\begin{aligned}
L(\theta, i, r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}) = \\
= L^{full} - \begin{cases} L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}), & \cos \theta < 0 \\ L^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}), & \cos \theta > 0. \end{cases} \quad (1.26)
\end{aligned}$$

Вводя функции

$$\begin{aligned}
L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \pi r_1^2 - \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0 \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases} \\
L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \frac{2}{3} \pi r_1^2 - \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0 \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases} \\
L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \frac{1}{2} \pi r_1^2 - \begin{cases} L_2^{dec}(\Delta(\theta, i), r_1, r_2), & \cos \theta < 0 \\ 0, & \cos \theta > 0, \end{cases} \\
L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \pi r_2^2 - \begin{cases} L_0^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0 \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases} \\
L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \frac{2}{3} \pi r_2^2 - \begin{cases} L_1^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0 \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases} \\
L_2^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) &= \frac{1}{2} \pi r_2^2 - \begin{cases} L_2^{dec}(\Delta(\theta, i), r_2, r_1), & \cos \theta > 0 \\ 0, & \cos \theta < 0, \end{cases} \quad (1.27)
\end{aligned}$$

можно записать полный блеск в виде их линейной комбинации как

$$\begin{aligned}
L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}) = \\
= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + \\
+ X_0^{(2)} L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(2)} L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i). \quad (1.28)
\end{aligned}$$

для модели с линейным законом потемнения к краю и как

$$\begin{aligned}
L(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, X_2^{(2)}) = \\
= X_0^{(1)} L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_2^{(1)} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + \\
+ X_0^{(2)} L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_1^{(2)} L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_2^{(2)} L_2^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i). \quad (1.29)
\end{aligned}$$

для модели с квадратичным законом потемнения к краю.

Частные производные функции полного блеска выражаются через частные производные функций  $L_0^{dec}$  и  $L_1^{dec}$ , по переменным  $\Delta$ ,  $r_f$ ,  $r_n$  и частные производные функции  $\Delta(\theta, i)$  по  $\theta$  и  $i$ .

Используя соотношение (1.16) найдем частные производные (1.21). После упрощений получаем:

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = -\frac{Q(\Delta, r_f, r_n)}{\Delta}, \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = 2\Psi(\Delta, r_f, r_n)r_f, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial L_0^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = 2\Psi(\Delta, r_f, r_n)r_n. \quad (1.32)$$

При вычислении производных  $L_1^{dec}$  введём функции:

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) \equiv \int_0^{r_f^2} \Omega \left( \frac{r_f^2 - \rho}{(\rho - (\Delta - r_n)^2) ((\Delta + r_n)^2 - \rho)} \right) d\rho, \quad (1.33)$$

$$K_2(\Delta, r_f, r_n) \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^{r_f^2} (r_n^2 - \rho) \Omega \left( \frac{r_f^2 - \rho}{(\rho - (\Delta - r_n)^2) ((\Delta + r_n)^2 - \rho)} \right) d\rho. \quad (1.34)$$

Получаем:

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = -\frac{\Delta K_1(\Delta, r_f, r_n) + K_2(\Delta, r_f, r_n)}{r_f}, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = \frac{2r_n}{r_f} K_1(\Delta, r_f, r_n), \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = \frac{1}{r_f^2} \int_0^{r_f^2} \rho \frac{\Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n)}{\sqrt{r_f^2 - \rho}} d\rho. \quad (1.37)$$

Интегрируя (1.37) по частям, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} &= \frac{2}{r_f} \int_0^{r_f^2} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) \sqrt{1 - \frac{\rho}{r_f^2}} d\rho + \\ &+ \int_0^{r_f^2} (\Delta^2 - r_n^2 - \rho) \Omega \left( \frac{r_f^2 - \rho}{(\rho - (\Delta - r_n)^2) ((\Delta + r_n)^2 - \rho)} \right) d\rho = \\ &= \frac{2}{r_f} L_1^{dec}(\Delta, r_f, r_n) + \frac{(\Delta^2 - 2r_n^2) K_1(\Delta, r_f, r_n) + \Delta K_2(\Delta, r_f, r_n)}{r_f^2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Частные производные  $L_2^{dec}$ :

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial \Delta} = \frac{2}{r_f^2} \Delta r_n^2 \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{\Delta^2 + r_n^2 + r_f^2}{2\Delta r_f^2} Q(\Delta, r_f, r_n), \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_f} = 2r_f \Psi(\Delta, r_f, r_n) - \frac{2}{r_f} L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n), \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial L_2^{dec}(\Delta, r_f, r_n)}{\partial r_n} = \frac{2}{r_f^2} r_n (\Delta^2 + r_n^2) \Psi(\Delta, r_n, r_f) - \frac{2}{r_f^2} r_n Q(\Delta, r_f, r_n). \quad (1.41)$$

Численное нахождение интегралов в (1.33) и (1.34) затруднено тем, что подынтегральные функции в них имеют особенности. Поэтому преобразуем их к более подходящему для этой цели виду. Подынтегральное выражение в них отлично от нуля на интервале  $((\Delta - r_n)^2, (\Delta + r_n)^2)$ . Поэтому

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) = K_2(\Delta, r_f, r_n) = 0 \quad \text{при } |\Delta - r_n| \geq r_f, \quad (1.42)$$

а если  $|\Delta - r_n| < r_f$ , интегрирование достаточно проводить по отрезку  $((\Delta - r_n)^2, \min((\Delta + r_n)^2, r_f^2))$ . На этом отрезке функция  $\arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right)$  действительна и монотонна по  $\rho$ , следовательно можно сделать замену

$$x = \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right). \quad (1.43)$$

Интегрирование по  $x$  будет проводится по отрезку

$$\left(0, \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \min((\Delta + r_n)^2, r_f^2)}{2\Delta r_n}\right)\right).$$

Принимая во внимание то, что

$$\frac{d}{d\rho} \arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \rho}{2\Delta r_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{(\rho - (\Delta - r_n)^2)((\Delta + r_n)^2 - \rho)}}$$

и

$$\arccos\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - \min((\Delta + r_n)^2, r_f^2)}{2\Delta r_n}\right) = \mathcal{A}\left(\frac{\Delta^2 + r_n^2 - r_f^2}{2\Delta r_n}\right) = \Psi(\Delta, r_n, r_f),$$

получаем:

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) = \int_0^{\Psi(\Delta, r_n, r_f)} \sqrt{r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 - 4\Delta r_n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx, \quad (1.44)$$

$$K_2(\Delta, r_f, r_n) = \int_0^{\Psi(\Delta, r_n, r_f)} (2r_n \cos(x) - \Delta) \sqrt{r_f^2 - (\Delta - r_n)^2 - 4\Delta r_n \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx. \quad (1.45)$$

Выражения (1.44) и (1.45) получены в предположении  $|\Delta - r_n| < r_f$ . В случае  $|\Delta - r_n| \geq r_f$  значение функции  $\Psi(\Delta, r_n, r_f) = 0$  – интегралы в указанных выражениях обращаются в ноль, что совпадает с выражением (1.42). Таким образом, выражения (1.44) и (1.45) справедливы при любых положительных значениях  $\Delta, r_n$  и  $r_f$ .

Отметим факт, существенный для численного интегрирования: подынтегральная функция в выражении (1.22) лишь кусочно-гладкая. Для эффективного же применения методов численного интегрирования, таких как метод квадратур Гаусса, необходимо чтобы интегрируемая функция была гладкой на всем участке интегрирования. Поэтому отрезок  $[0, r_f^2]$  следует разбить при интегрировании на части точками разрыва производных подынтегральной функции и проводить интегрирование по каждой части отдельно. Приведём общее выражение для последовательности этих точек (в зависимости от значений параметров  $r_n, r_f, \Delta$  часть этих точек совпадает):

$$\{\max(0, \Delta - r_n)^2, \min(r_f^2, (\Delta - r_n)^2), \min(r_f, \Delta + r_n)^2, r_f^2\}. \quad (1.46)$$

Приведённое выражение удобно использовать при построении общего численного алгоритма интегрирования.

Как упоминалось выше, функция  $L_1^{dec}$  выражается через эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода

$$F(\phi | m) \equiv \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}},$$

$$E(\phi | m) \equiv \int_0^\phi \sqrt{1 - m \sin^2(\theta)},$$

$$\Pi(n; \phi | m) \equiv \int_0^\phi \frac{d\theta}{(1 - n \sin^2(\theta))\sqrt{1 - m \sin^2(\theta)}},$$

для вычисления которых существуют эффективные алгоритмы [16]. Проинтегрируем (1.22) по частям, отметив, что при  $\Delta > 0$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \Psi(\Delta, \sqrt{\rho}, r_n) = \pi\Theta(r_n) - \Delta,$$

где

$$\Theta(t) \equiv \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Далее, сделав замену (1.43) и осуществив необходимые алгебраические преобразования

подынтегрального выражения можно получить, что

$$\begin{aligned}
L_1^{dec}(\Delta, r_1, r_2) &= \frac{2\pi}{3} \Theta(r_n - \Delta) r_f^2 + \\
&+ \Omega \left( \frac{1}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right) \left[ \frac{2r_f^3(\Delta + r_n)}{3(\Delta - r_n)} \Pi \left( -\frac{4\Delta r_n}{(r_n - \Delta)^2}; \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right) - \right. \\
&- \frac{2}{9} \left( 3r_f(\Delta^2 - r_n^2) + \frac{(r_f^2 - (r_n - \Delta)^2)((r_n + \Delta)^2 - r_f^2)}{r_f} \right) F \left( \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right) \Big] + \\
&+ \frac{2}{9r_f} \Omega(r_f^2 - (r_n - \Delta)^2) (7r_n^2 + \Delta^2 - 4r_f^2) E \left( \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right).
\end{aligned}$$

Для функций  $K_1$  и  $K_2$  из (1.44) и (1.45) можно получить, что

$$K_1(\Delta, r_f, r_n) = 2\Omega(r_f^2 - (r_n - \Delta)^2) E \left( \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right)$$

и

$$\begin{aligned}
K_2(\Delta, r_f, r_n) &= \frac{2}{3\Delta} \Omega(r_f^2 - (r_n - \Delta)^2) \left[ ((r_n + \Delta)^2 - r_f^2) F \left( \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right) + \right. \\
&+ (r_f^2 - 4\Delta^2 - r_n^2) E \left( \frac{\Psi(\Delta, r_n, r_f)}{2} \left| \frac{4\Delta r_n}{r_f^2 - (r_n - \Delta)^2} \right. \right) \Big].
\end{aligned}$$

# Глава 2

## Оценка ошибок

### 2.1 Линейная модель и метод наименьших квадратов

Поскольку цель нашей работы состоит в том, чтобы выяснить соотношения между разными методами оценки ошибок параметров, напомним некоторые соотношения из математической статистики применительно к проводимым нами вычислениям.

Рассмотрим линейную модель, заданную последовательным набором функций  $g_0(\theta) \dots g_P(\theta)$  и линейно выражающейся через них функцией  $f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P)$ , определенными для действительных  $\alpha_1 \dots \alpha_P$  и  $\theta$  из множества  $\{\theta_1 \dots \theta_M\}$ :

$$f^{lin}(\theta, \alpha_1 \dots \alpha_P) = g_0(\theta) + \sum_{p=1}^P g_p(\theta) \alpha_p \quad (2.1)$$

При этом множество  $\{\theta_1 \dots \theta_M\}$  соответствует множеству из  $M$  точек, в которых производятся наблюдения. Зададимся вектором  $(\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P)^T$ , соответствующему набору истинных значений физических величин (здесь  $M$  – полное число точек наблюдения), и вектором  $(w_1 \dots w_M)^T$  весовых коэффициентов, предполагая при этом, что матрица  $A_{qp} = \sum_{m=1}^M g_q(\theta_m) g_p(\theta_m) w_m$  является невырожденной. Также зададимся вектором случайных наблюдаемых величин  $\xi = (\xi_1 \dots \xi_M)^T$ , в отношении которых предполагается, что они статистически независимы, то есть  $\text{cov}(\xi_i, \xi_j) = 0$  при  $i \neq j$ , и распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями  $M(\xi_k) = f^{lin}(\theta_k, \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P)$ . Кроме того, предполагается, что измерения случайных величин  $\xi_1 w_1 \dots \xi_M w_M$  являются равноточными, то есть  $\sigma^2(\xi_1 w_1) = \sigma^2(\xi_2 w_2) = \dots = \sigma^2(\xi_M w_M) = \varepsilon_0^2$ , где  $\sigma^2(\cdot)$  здесь и далее обозначается операция вычисления дисперсии, а  $\varepsilon_0^2$  – заданная величина, называемая дисперсией единицы веса. Обозначая  $\sigma^2(\xi_m) = \sigma_m^2$  получим, что  $w_m = \varepsilon_0^2 / \sigma_m^2$ . Зададим для данной модели функционал невязки выражением:

---

<sup>1</sup>Такая форма  $f^{lin}$ , в которой первое слагаемое не зависит от линейного параметра, выбрана для удобства последующего практического использования.



$$\begin{aligned}
R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P, \xi_1 \dots \xi_M) &= \sum_{m=1}^M (\xi_m - f^{lin}(\theta_m, \alpha_1 \dots \alpha_P))^2 w_m = \\
&= \sum_{m=1}^M \left( \xi_m - g_0(\theta_m) - \sum_{p=1}^P g_p(\theta_m) \alpha_p \right)^2 w_m. \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Значения параметров  $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$  (которые мы будем называть центральными), доставляющие минимум функционалу невязки (2.2) при фиксированных  $\xi_1 \dots \xi_M$ , находятся как решения системы  $P$  линейных уравнений:

$$\frac{\partial R^{lin}(\alpha_1 \dots \alpha_P)}{\partial \alpha_q} = 2B_q - 2 \sum_{p=1}^P A_{qp} \alpha_p = 0, \quad q = 1 \dots P, \quad (2.3)$$

где

$$A_{qp} = \sum_{m=1}^M g_q(\theta_m) g_p(\theta_m) w_m; \quad B_q = \sum_{m=1}^M (\xi_m - g_0(\theta_m)) g_q(\theta_m) w_m. \quad (2.4)$$

и равны

$$\alpha_p^c(\xi) = \sum_{q=1}^P A_{qp}^{inv} B_q = \sum_{m=1}^M (\xi_m - g_0(\theta_m)) w_m \sum_{q=1}^P A_{qp}^{inv} g_q(\theta_m), \quad p = 1 \dots P. \quad (2.5)$$

где  $A_{qp}^{inv}$  обозначаются элементы матрицы, обратной к  $A$ :  $A_{qp}^{inv} \equiv (A^{-1})_{qp}$

Таким образом, центральные значения параметров  $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$  выражаются через линейную комбинацию  $\xi_1 \dots \xi_M$  и, следовательно, являются нормально распределенными. Их математические ожидания равны  $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_P$  (что получается если взять математическое ожидание от обеих частей (2.5) и подставить в него (2.1)). Используя линейность операции ковариации  $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ , статистическую независимость  $\xi_1 \dots \xi_M$  и то, что  $\text{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sigma^2(\xi_i) = \varepsilon_0^2/w_i$ , найдем матрицу ковариаций параметров  $\alpha_1^c \dots \alpha_P^c$ :

$$\begin{aligned}
\text{cov}(\alpha_p^c(\xi), \alpha_q^c(\xi)) &= \sum_{m=1}^M \sigma^2(\xi_m) w_m^2 \left( \sum_{i,j=1}^P A_{ip}^{inv} A_{jq}^{inv} g_i(\theta_m) g_j(\theta_m) \right) = \\
&= \varepsilon_0^2 \sum_{i,j=1}^P A_{ip}^{inv} A_{jq}^{inv} \left( \sum_{m=1}^M w_m g_i(\theta_m) g_j(\theta_m) \right) = \varepsilon_0^2 A_{pq}^{inv}. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Дисперсии центральных значений параметров  $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$  находятся как диагональные элементы матрицы ковариаций:

$$\sigma^2(\alpha_p^c(\xi)) = \varepsilon_0^2 A_{pp}^{inv}. \quad (2.7)$$

В модели, получающейся с помощью линейной замены параметров с невырожденной матрицей  $C_p^i$ :

$$\alpha'_p = C_0 + \sum_{i=1}^P C_p^i \alpha_i,$$

дисперсии новых параметров  $\alpha'_1 \dots \alpha'_P$  находятся по формуле:

$$\sigma^2(\alpha'^c_p) = \sum_{i,j=1}^P C_p^i C_p^j \text{cov}(\alpha_i^c, \alpha_j^c). \quad (2.8)$$

Зная дисперсию центрального значения параметра, можно построить интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Для этого достаточно заметить, что исходя из нормального закона распределения центрального значения параметра следует, что

$$\mathbf{P}(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa(\gamma) \sigma(\alpha_p^c(\xi))) = \gamma, \quad (2.9)$$

где символ  $\mathbf{P}$  означает вероятность выполнения условия, а  $\kappa$  зависит от выбранной вероятности попадания (уровня доверия)  $\gamma$  и находится как корень уравнения:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\kappa} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \gamma.$$

Например, при  $\kappa$  равном 1, 2 и 3 уровень доверия  $\gamma$  равен 0.6827, 0.9545 и 0.9973 соответственно (правило одной, двух и трех  $\sigma$ ).

Когда неизвестно значение  $\varepsilon_0$  (например, в случае реально наблюдаемой кривой блеска), для нахождения ошибок вместо формулы (2.7) используются формулы, получающиеся из (2.7) и (2.6) заменой  $\varepsilon_0$  на величину  $v_0$  [17]:

$$v_0^2(\xi) = \frac{R^{lin}(\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi), \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P}, \quad (2.10)$$

называемую среднеквадратичной оценкой дисперсии единицы веса. Полученные таким образом среднеквадратичные оценки для дисперсий (являющиеся случайными величинами):

$$\sigma_{est}^2(\alpha_p^c(\xi)) \equiv v_0^2(\xi) A_{pp}^{inv}. \quad (2.11)$$

При этом  $v_0$  является случайной величиной, и величина  $(\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p) / \sigma_{est}(\alpha_p^c(\xi))$  имеет распределение Стьюдента с  $M - P$  степенями свободы. Однако при достаточно больших  $M - P \gg 10$  оно уже достаточно близко к нормальному, и можно считать, что вероятность  $\mathbf{P}(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma(\alpha_p^c(\xi))) \simeq \mathbf{P}(|\alpha_p^c(\xi) - \bar{\alpha}_p| \leq \kappa \sigma_{est}(\alpha_p^c(\xi)))$ , то есть можно считать, что вероятность попадания истинного значения в интервал, построенный с помощью умножения среднеквадратичной оценки дисперсии на соответствующий коэффициент  $\kappa(\gamma)$  будет достаточно близка к  $\gamma$ <sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Отметим, что изменения среднеквадратичных оценок дисперсий (являющихся случайными величинами) от выборки к выборке, то есть их разброс для разных измерений одной и той же кривой, может быть значительно больше чем различие между функциями распределения Стьюдента и Гаусса. Указанный разброс обратно пропорционален квадратному корню из числа точек кривой блеска.

## 2.2 Нелинейная модель и метод дифференциальных поправок

Рассмотрим теперь модель, задаваемую произвольной, в общем случае нелинейной функцией  $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$ , определенной для  $\theta \in \{\theta_1 \dots \theta_M\}$  и для векторов  $(\beta_1 \dots \beta_P)^T \in \mathcal{B}$ , где  $\mathcal{B}$  – некоторая область действительного евклидового пространства. При этом мы предполагаем  $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$  дифференцируемой по  $\beta_1 \dots \beta_P$  во всей области определения.

При этом также как и для линейной модели задаются  $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P$ ,  $w_1 \dots w_M$ , нормально распределенные случайные величины  $\xi_1 \dots \xi_M$ , дисперсия единицы веса  $\varepsilon_0$  и функционал невязки. Случайные величины  $\xi_1 \dots \xi_M$  имеют нормальное распределение и

$$\begin{aligned} M(\xi_k) &= f(\theta_k, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P), \\ \sigma^2(\xi_1 w_1) &= \sigma^2(\xi_2 w_2) = \dots = \sigma^2(\xi_M w_M) = \varepsilon_0^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $M(\xi_k)$  означает математическое ожидание величины  $\xi_k$ , а  $\sigma^2(\cdot)$  – операцию нахождения дисперсии.

Также предположим, что матрица

$$A_{qp}(\beta_1 \dots \beta_P) = \sum_{m=1}^M \frac{\partial f}{\partial \beta_q}(\theta_m, \beta_1 \dots \beta_P) \frac{\partial f}{\partial \beta_p}(\theta_m, \beta_1 \dots \beta_P) w_m \quad (2.13)$$

является невырожденной при  $(\beta_1 \dots \beta_P)^T \in \mathcal{B}$ . При этом мы будем обозначать элементы матрицы, обратной матрице (2.13), как  $A_{qp}^{\text{inv}}(\beta_1 \dots \beta_P)$ .

Функционал невязки задается следующим образом:

$$R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M) = \sum_{m=1}^M (\xi_m - f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P))^2 w_m, \quad (2.14)$$

и предполагается, что при фиксированных  $\xi_1 \dots \xi_M$  он является выпуклым по переменным  $\beta_1 \dots \beta_P$  и достигает по ним минимума в области  $\mathcal{B}$ .

Метод дифференциальных поправок заключается в том, что функция  $f$  заменяется ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке минимума функционала невязки, и в качестве оценки дисперсий минимальных значений  $\beta_1 \dots \beta_P$  берутся дисперсии, найденные в рамках метода наименьших квадратов для соответствующей линейной модели.

Обозначим как  $\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)$  значения параметров (которые назовем центральными), доставляющие минимум функционалу невязки

$R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)$  при фиксированных  $\xi_1 \dots \xi_M$  и положим в (2.1), а затем в (2.4) и в (2.5)

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \beta_p - \beta_p^c(\xi), \\ g_0(\theta) &= f(\theta, \beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \\ g_p(\theta) &= \frac{\partial f}{\partial \beta_p}(\theta, \beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $p = 1 \dots P$ . Тогда величины:

$$\text{cov}_o(\beta_q^c(\xi), \beta_p^c(\xi)) \equiv \varepsilon_0^2 A_{qp}^{\text{inv}}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)) \quad (2.6')$$

и

$$\sigma_o^2(\beta_p^c(\xi)) \equiv \varepsilon_0^2 A_{pp}^{\text{inv}}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)), \quad (2.7')$$

полученные подстановкой (2.15) в формулы (2.6) и (2.7) для ковариаций и дисперсий центральных значений в линейной модели, берутся в качестве приближенной оценки ковариаций и дисперсий:  $\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)$ . В случае реально наблюдаемой кривой блеска, когда неизвестно значение дисперсии единицы веса, аналогично линейному случаю вместо значения  $\varepsilon_0$  используется среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса

$$v_0^2(\xi) = \frac{R(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi), \xi_1 \dots \xi_M)}{M - P} \quad (2.10')$$

и соответствующие приближенные среднеквадратичные оценки дисперсий параметров

$$\sigma_{est}^2(\beta_p^c(\xi)) \equiv v_0^2(\xi) A_{pp}^{\text{inv}}(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)). \quad (2.11')$$

Использование в расчетах такого приближения предполагает, что можно пренебречь изменением производных функции  $f$  в (2.13), вычисленных с центральными значениями параметров, при изменении  $\xi$  в окрестности их математических ожиданий.

Очевидно, что если  $f(\theta, \beta_1 \dots \beta_P)$  линейна по  $\beta_1 \dots \beta_P$ , то (2.7') – (2.11') совпадает с (2.7) – (2.11), то есть в случае линейной функции метод дифференциальных поправок тождествен методу наименьших квадратов.

В модели, получающейся с помощью обратимой замены параметров

$$\beta_p' = \phi_p(\beta_1 \dots \beta_P), \quad (2.16)$$

где  $\phi$  - гладкие функции, а матрицы  $\frac{\partial \phi_p(\beta_1 \dots \beta_P)}{\partial \beta_i}$  - невырожденные, выражение для приближенных оценок дисперсий центральных значений новых параметров  $\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi)$  можно получить путем замены правой части (2.16) ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке  $(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))^T$ , полагая в формуле (2.8)  $C_p^i = \frac{\partial \phi_p(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_i^c}$  и заменяя в ней ковариации  $\alpha_1^c(\xi) \dots \alpha_P^c(\xi)$  на соответствующие приближенные оценки ковариаций  $(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))$

$$\sigma_o^2(\beta_p^c(\xi)) = \sum_{i,j=1}^P \frac{\partial \phi_p(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_i^c} \frac{\partial \phi_p(\beta_1^c(\xi) \dots \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_j^c} \text{cov}_o(\beta_i^c(\xi), \beta_j^c(\xi)). \quad (2.17)$$

Отметим, что в описанных методах делается предположение о том, что используемая модель идеально верна, а для оценки ошибок параметров используются статистика нормального распределения.

## 2.3 Метод Монте-Карло

В работе также проведены оценки дисперсии  $\sigma(\beta_1^c) \dots \sigma(\beta_p^c)$  методом Монте-Карло. Оценка дисперсии проводилась следующим образом. При заданных  $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p$  вычислялись в фазах  $\theta_1 \dots \theta_M$  значения кривой  $\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_M$ . Далее с заданной величиной  $\varepsilon_0$  случайным образом генерировалась  $N$  раз последовательность нормально распределенных  $\xi_1^{(n)} \dots \xi_M^{(n)}$ ,  $n = 1 \dots N$  с математическими ожиданиями равными  $\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_M$ .

Для каждой последовательности  $\xi_1^{(n)} \dots \xi_M^{(n)}$ ,  $n = 1 \dots N$  находились центральные значения  $\beta_1^{c(n)} \dots \beta_p^{c(n)}$  и их дисперсии оценивались как

$$\sigma_{mc}^2(\beta_p^c) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\beta_p^{c(n)} - \bar{\beta}_p)^2. \quad (2.18)$$

Естественно, такой метод подразумевает, что истинные значения  $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p$  известны, что возможно в модельных задачах, целью которых является нахождение ошибок для сравнения с ошибками, найденными другими способами. В случае же обработки реальной кривой блеска данный метод можно применить используя вместо истинных значений параметров  $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p$  их центральные значения, полученные решением кривой блеска методом МНК. При этом делается предположение о том, что малое изменение  $\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p$  вызовет относительно малое изменение ошибки. Также, в этом методе, как и в методе дифференциальных поправок, делается предположение об адекватности модели наблюдательным данным.

## 2.4 Метод доверительных областей

Рассмотрим теперь невязку  $R$  для общей модели, задаваемую (2.14). Тогда по теореме о  $\chi^2$ -распределении

$$\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_M^2. \quad (2.19)$$

где " $\sim$ " означает "распределено как". Функция распределения  $\chi_M^2$ :

$$\chi_m^2(t) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}, 0, \frac{t}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}, \quad (2.20)$$

где  $\Gamma(\frac{m}{2}, 0, \frac{t}{2})$  – неполная обобщённая гамма функция. Следовательно, если  $\chi_M^2(\Delta_0) = \gamma$ , то есть  $\Delta_0$  – квантиль  $\chi_M^2$ -распределения для некоторого уровня доверия  $\gamma < 1$ , то соответствующая вероятность

$$\mathbf{P} \left( \frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_p, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \leq \Delta_0 \right) = \gamma. \quad (2.21)$$

Пусть  $D_p$  –  $P$ -мерное множество значений вектора  $\beta_1 \dots \beta_p$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \leq \Delta_0 \quad (2.21')$$

Тогда (2.21) эквивалентно утверждению: с вероятностью  $\gamma$  множество  $D_P$  не пусто и истинные значения  $(\beta_1 \dots \beta_P) \in D$ . Множество  $D$  является доверительной областью для  $(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P)$ . Отметим, что для данной статистики множество  $D$  может быть пустым. А задача построения доверительной области  $D_P$  тесно связана с задачей проверки статистической гипотезы о равенстве истинных значений параметров заданным числам:  $\bar{\beta}_1 = \beta_1, \dots, \bar{\beta}_P = \beta_P$ . При построенной вышеуказанным способом области  $D$  вероятность ошибочно отвергнуть эту гипотезу при  $(\beta_1 \dots \beta_P) \notin D$  равна уровню значимости  $\alpha = 1 - \gamma$ .

Также отметим, что в данном случае нельзя использовать вместо  $\varepsilon_0$  его среднеквадратичную оценку  $u_0$ , задаваемую (2.10'), поскольку такая замена существенно нарушила бы закон распределения (2.19). В частности, пустой доверительной области не получалось бы при квантиле  $\Delta_0 > M - P$  (при  $M = 101$  это соответствует тому, что  $\gamma > 0.35..$ ), то есть модель всегда была бы адекватна наблюдениям. Поэтому следует брать либо точное значение  $\varepsilon_0$ , известное в модельных задачах, либо его значение, полученное с большой точностью из независимых соображений в случае реальных наблюдений.

Поскольку на практике не всегда известно  $\varepsilon_0^2$  часто используется критерий, основанный на распределении Фишера. Пусть  $M$  – число "нормальных" точек, объединяющих измерения в группе для последующего усреднения. Пусть значение  $\xi_m$  в точке  $\theta_m$  измеряется  $N_m$  раз,  $m = 1 \dots M$ , то есть в  $m$ -ой группе содержится  $N_m$  точек. Обозначим за  $N$  полное число измерений:  $N = \sum_{m=1}^M N_m$ . Пусть  $\xi_m^j$  – значение  $j$ -го измерения кривой ( $j = 1, 2 \dots N_m$ ) в точке  $\theta_m$ , то есть  $\xi_m^j$  – случайная величина с нормальным законом распределения, и  $M(\xi_m^j) = f(\theta_m, \bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P)$ . Пусть  $\xi_m = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \xi_m^j$ , тогда их истинные дисперсии  $\sigma^2(\xi_m) = \sigma^2(\xi_m^j)/N_m$ , а за  $\sigma_m^{obs2} = \frac{1}{N_m(N_m-1)} \sum_{j=1}^{N_m} (\xi_m - \xi_m^j)^2$  обозначим оценки дисперсий наблюдений в этих точках. Тогда

$$\frac{R(\bar{\beta}_1 \dots \bar{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M) N - M}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1) w_m \sigma_m^{obs2}} \sim \mathbf{F}_{M, N-M} \quad (2.22)$$

где  $\mathbf{F}_{M, N-M}$  – распределение Фишера [18]. Его функция распределения:

$$\mathbf{F}_{n,m}(t) = \frac{B_{\frac{nt}{m+nt}}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)}, \quad (2.23)$$

где  $B_z\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$  – неполная бета-функция. Процедура построения доверительной области для  $(\beta_1 \dots \beta_P)$  аналогична предыдущей.

Рассмотрим теперь случай, когда зависимость функции  $f$  от  $K$  ( $K \leq P$ ) параметров  $\beta_1 \dots \beta_P$ , скажем от  $\beta_1 \dots \beta_K$ , линейная. Пусть  $\tilde{\beta}_1(\beta_{K+1} \dots \beta_P) \dots \tilde{\beta}_K(\beta_{K+1} \dots \beta_P)$  – значения, доставляющие минимум при фиксированных  $\beta_{K+1} \dots \beta_P$  невязке

$R(\beta_1 \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M)$ , которая является в данном случае квадратичной формой по  $\beta_1 \dots \beta_K$ . Тогда (см. [18])

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P) \dots \tilde{\beta}_K(\tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P), \tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-K}^2 \quad (2.24)$$

и

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P) \dots \tilde{\beta}_K(\tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P), \tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1) w_m \sigma_{\sigma m}^2} \frac{N - M}{M - K} \sim \mathbf{F}_{M-K, N-M} \quad (2.25)$$

Эти статистики могут использоваться для построения доверительных областей для  $\tilde{\beta}_{K+1} \dots \tilde{\beta}_P$ .

В частности, при некотором  $k (1 \leq k \leq P)$

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\tilde{\beta}_k) \dots \tilde{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\tilde{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-P+1}^2. \quad (2.26)$$

и

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\tilde{\beta}_k) \dots \tilde{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\tilde{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1) w_m \sigma_{\sigma m}^2} \frac{N - M}{M - P + 1} \sim \mathbf{F}_{M-P+1, N-M} \quad (2.27)$$

где  $\tilde{\beta}_p(\beta_k)$  и  $1 \leq p \leq P, p \neq k$ , минимизируют невязку при фиксированном  $\beta_k$ . Соотношения (2.26) и (2.27) позволяют построить одномерные доверительные области (интервалы) для параметра  $\beta_k$  с заданным уровнем доверия.

Найдем теперь закон распределения разности между невязкой, полученной при истинных значениях параметров (с законом распределения  $\chi_M^2$ ) и этой же невязкой, полученной при центральных значениях параметров. Рассмотрим сначала случай, когда зависимость от всех параметров линейная и, положив в (2.24)  $K = P$  получим закон распределения невязки, полученной при центральных значениях параметров:

$$\frac{R(\beta_1^c \dots \beta_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_{M-P}^2. \quad (2.28)$$

Обозначим  $R_{min} \equiv R(\beta_1^c \dots \beta_P^c, \xi_1 \dots \xi_M)$ . С помощью известного утверждения ( $\xi_a \sim \chi_a^2$  и  $\xi_b \sim \chi_b^2 \Rightarrow \xi_a + \xi_b \sim \chi_{a+b}^2$ ) получим:

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1 \dots \tilde{\beta}_P, \xi_1 \dots \xi_M) - R_{min}}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_P^2. \quad (2.29)$$

Использование статистики (2.29) предполагает априорную адекватность модели и доверительное множество, полученное с помощью статистики (2.29) никогда не пусто.

---

<sup>1</sup>Конечно, вектора  $\beta^c$  и  $\tilde{\beta}$  зависят также и от наблюдаемых  $\xi$ . Данная зависимость опущена для краткости.

При  $K = P - 1$  из (2.24) и (2.28) получается:

$$\frac{R(\tilde{\beta}_1(\bar{\beta}_k) \dots \bar{\beta}_k \dots \tilde{\beta}_P(\bar{\beta}_k), \xi_1 \dots \xi_M) - R_{min}}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_1^2. \quad (2.30)$$

Статистика (2.30) также предполагает априорную адекватность модели и получаемые с помощью нее одномерные доверительные множества (интервалы) никогда не пусты.

Если же зависимость от  $\beta_1 \dots \beta_K$  не является линейной, то сделанные утверждения о распределении (2.24) и (2.25) и следующие из них (2.26)–(2.30) выполняются в асимптотическом смысле, когда число измерений стремится к бесконечности, и одной из задач данной работы является численная проверка допустимости таких асимптотических приближений.

Заметим, что если доверительное множество не пусто (используемая модель адекватна наблюдаемой кривой), то оно содержит точку  $\beta_1^c \dots \beta_P^c$ .

Также приведём интерпретацию невязок, минимальных по части параметров в геометрических терминах. Если  $P$ -мерное множество

$$D_P = \{(\beta_1 \dots \beta_P) : R(\beta_1 \dots \beta_P) \leq C\}$$

то  $P - K$ -мерное множество

$$D_{P-K} = \{(\beta_{K+1} \dots \beta_P) : R(\tilde{\beta}_1(\beta_{K+1} \dots \beta_P) \dots \tilde{\beta}_K(\beta_{K+1} \dots \beta_P), \beta_{K+1} \dots \beta_P, \xi_1 \dots \xi_M) \leq C\}$$

является проекцией  $D_P$  на  $P - K$ -мерную плоскость  $\beta_{K+1} \dots \beta_P$ .

Так как проекции доверительного множества вычисляются с помощью соответствующих невязок, минимизированных по всем параметрам кроме одного, мы можем, зная закон распределения этих минимальных невязок, найти вероятности попадания истинных значений в соответствующие проекции доверительной области, построенной по заданному уровню доверия  $\gamma$ .

Если  $\chi_M^2(\Delta_0) = \gamma$  и  $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия  $\gamma$ , полученное с помощью квантиля  $\Delta_0$  для статистики (2.19), то его проекции  $D_1^{(p)}$  на оси  $\beta_p$ ,  $p = 1 \dots P$  – одномерные доверительные множества для статистики (2.26) с уровнем доверия

$$\gamma' = \chi_{M-P+1}^2(\Delta_0). \quad (2.31)$$

(Напомним, что  $\chi_M^2(t)$  задается (2.20).) Также, если  $\chi_P^2(\Delta_0) = \gamma$  и  $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия  $\gamma$ , полученное с помощью квантиля  $\Delta_0$  для статистики (2.29), то его проекции  $D_1^{(p)}$  на оси  $\beta_p$ ,  $p = 1 \dots P$  – одномерные доверительные множества для статистики (2.30) с уровнем доверия

$$\gamma' = \chi_1^2(\Delta_0). \quad (2.32)$$

Наконец, если  $\mathbf{F}_{M,N-M}(\Delta_0) = \gamma$  и  $D_P - P$ -мерное доверительное множество с уровнем доверия  $\gamma$ , полученное с помощью квантиля  $\Delta_0$  для статистики (2.22), то



его проекции  $D_1^{(p)}$  на оси  $\beta_p$ ,  $p = 1 \dots P$  – одномерные доверительные множества для статистики (2.25) с уровнем доверия

$$\gamma' = \mathbf{F}_{M-P+1, N-M} \left( \frac{M}{M-P+1} \Delta_0 \right), \quad (2.33)$$

где функция  $\mathbf{F}_{n,m}(t)$  задается (2.23).

В случаях с нелинейной моделью сравнение результатов, полученных по формулам (2.31)–(2.33), с непосредственно вычисленными соответствующими интервалами ошибок позволяет оценить степень искажения результатов процедурой линеаризации. Соответственно, таким образом можно сделать вывод о том, насколько приемлема линеаризация в конкретном случае.

В табл.2.1 приведены значения вероятности  $\gamma'$  попадания в проекцию области при вероятности попадания в саму область  $\gamma = 0.6827$  для одно, двух трех и четырех параметрических задач, рассчитанные с помощью формул (2.31)–(2.33). Путём численного эксперимента можно проверить, насколько число попаданий истинных значений в проекцию области на ось параметра согласуется с данными в табл.2.1 теоретическими значениями  $\gamma'$  и таким образом сделать вывод о применимости линейного приближения для конкретной нелинейной модели.

Таблица 2.1: Значения  $\gamma'$  при  $\gamma = 0.6827$  для двух трех и четырех параметрических задач.

Статистика	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
$\chi_P^2$	0.8703	0.9396	0.9702
$\chi_M^2, M = 101$	0.7072	0.7309	0.7536
$\mathbf{F}_{M, N-M}, M = 101, N = 1212$	0.7046	0.7258	0.7464

Приведем коэффициенты  $\kappa$ , на которые нужно домножить стандартное отклонение  $\sigma$  (см. формулу (2.9)), чтобы получить величину проекции доверительной области на ось параметра, найденной в статистике с законом распределения  $\chi_P^2$  при условии, что доверительная область содержит истинное значение параметров с вероятностью  $\gamma = 0.6827$ . Коэффициенты равны 1.515173, 1.87796 и 2.17244 в случае двух-, трех- и четырех-параметрических областей соответственно. Забегая вперед отметим, что полученные в численном эксперименте дисперсии и проекции доверительной области в статистике с законом распределения  $\chi_P^2$  хорошо удовлетворяют этому правилу. Также отметим, что в случае многопараметрических задач увеличение вероятности накрытия при проектировании строго одинаково для всех параметров.

Приведем для уровня доверия  $\gamma = 0.6827$  значение квантиля  $\Delta_0$  распределения  $\chi_P^2$  для одно, двух, трех и четырех-параметрических задач.

То есть, например, в одномерных задачах, чтобы доверительная область накрывала точное решение с вероятностью  $\gamma = 0.6827$ , необходимо отсекал значения  $\frac{R(\beta_1, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0^2}$  числом на 1 большим, чем минимальное значение этой величины.

Таблица 2.2: Значение квантиля  $\Delta_0$  распределения  $\chi^2_P$  для одно, двух, трех и четырех-параметрических задач для уровня доверия  $\gamma = 0.6827$ .

Количество параметров	$P = 1$	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
$\Delta$	1.0000	2.2957	3.5267	4.7195

## 2.5 Применение методов нахождения ошибок к кривой блеска на примере двойной звёздной системы YZCas

Рассмотрим теперь модель кривой блеска двойной системы в предположении линейного закона потемнения к краю. Перейдём в (1.28) к новой переменной  $z = \cos^2 i$  и новым индексам:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(\theta, r_1, r_2, z) &= L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i); & \mathcal{L}_2(\theta, r_1, r_2, z) &= L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i); \\ \mathcal{L}_3(\theta, r_1, r_2, z) &= L_0^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i); & \mathcal{L}_4(\theta, r_1, r_2, z) &= L_1^{(2)}(\theta, r_1, r_2, i); \\ \mathcal{X}_1 &= X_0^{(1)}; & \mathcal{X}_2 &= X_1^{(1)}; & \mathcal{X}_3 &= X_0^{(2)}; & \mathcal{X}_4 &= X_1^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В новых обозначениях выражение (1.28) запишется следующим образом

$$\mathcal{L}(\theta, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4) = \sum_{k=1}^4 \mathcal{X}_k \mathcal{L}_k(\theta, r_1, r_2, z). \quad (2.35)$$

Значение блеска вне затмения  $L^{full}$  полагалось известным точно и был принят за единицу измерения блеска:  $L^{full} = 1$ . Используя указанное предположение об изначально заданном значении блеска вне затмения выразим параметр  $\mathcal{X}_4$  через остальные с помощью формулы (1.13) (с учетом переобозначений (2.34)):

$$\mathcal{X}_4 = \frac{3}{2\pi r_2^2} - \frac{3\mathcal{X}_1 r_1^2}{2r_2^2} - \frac{\mathcal{X}_2 r_1^2}{r_2^2} - \frac{3}{2} \mathcal{X}_3. \quad (2.36)$$

Положив в (2.14)

$$\begin{aligned} P &= 6 \text{ и } \beta_1 = r_1, \beta_2 = r_2, \beta_3 = z, \beta_4 = \mathcal{X}_1, \beta_5 = \mathcal{X}_2, \text{ и } \beta_6 = \mathcal{X}_3 \\ f(\theta, \beta_1 \dots \beta_6) &= \mathcal{L}(\theta, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4) \end{aligned} \quad (2.37)$$

выпишем получившийся функционал невязки:

$$R(r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3, \xi_1 \dots \xi_M) = \sum_{m=1}^M (\xi_m - \mathcal{L}(\theta, r_1, r_2, z, \mathcal{X}_1 \dots \mathcal{X}_4))^2 w_m, \quad (2.38)$$

где  $\mathcal{X}_4$  задается выражением (2.36).

Центральными значениями параметров будут значения, доставляющие ему абсолютный минимум. Обозначим их как  $r_1^c, r_2^c, z^c$  и  $\mathcal{X}_1^c, \mathcal{X}_3^c, \mathcal{X}_3^c$ . Дисперсии центральных значений и их среднеквадратичные оценки можно найти, подставив (2.37) в (2.7') и в (2.11').

Значения  $\tilde{\mathcal{X}}_p(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)$ , доставляющие минимум невязке при фиксированных  $r_1, r_2, z$ , можно найти, положив при фиксированных  $\theta_m, r_1, r_2$  и  $z$  в (2.1), (2.4) и (2.5)  $P = 3$ ,

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{3}{2\pi r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_1(\theta_k) &= \mathcal{L}_1(r_1, r_2, z) - \frac{3r_1^2}{2r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_2(\theta_k) &= \mathcal{L}_2(r_1, r_2, z) - \frac{r_1^2}{r_2^2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z), \\ g_3(\theta_k) &= \mathcal{L}_3(r_1, r_2, z) - \frac{3}{2} \mathcal{L}_4(\theta_m, r_1, r_2, z) \end{aligned}$$

и обозначив  $A^{inv}(r_1, r_2, z)$ ,  $A^{inv}(r_1, r_2, z)$  и  $B(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)$  значения матриц,  $A^{inv}$  и  $B$  соответственно. Тогда

$$\tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) = A^{inv}(r_1, r_2, z)B(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M), \quad (2.39)$$

Обозначим невязки, минимальные по  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3$  как

$$\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) = R(r_1, r_2, z, \tilde{\mathcal{X}}_1(r_1, r_2, z), \tilde{\mathcal{X}}_2(r_1, r_2, z), \tilde{\mathcal{X}}_3(r_1, r_2, z), \xi_1 \dots \xi_M).$$

(зависимость  $\tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)$  от  $\xi_1 \dots \xi_M$  опущена для краткости)

Согласно (2.24) и (2.25)

$$\frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)}{\varepsilon_0} \sim \chi_{M-3}^2 \quad (2.40)$$

и

$$\frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M)}{\sum_{m=1}^M (N_m - 1)w_m \sigma_m^{obs 2}} \frac{N - M}{M - 3} \sim \mathbf{F}_{M-3, N-M} \quad (2.41)$$

Также аналогично (2.29) получается, что (в асимптотическом смысле)

$$\frac{\tilde{R}(r_1, r_2, z, \xi_1 \dots \xi_M) - R_{min}}{\varepsilon_0} \sim \chi_3^2. \quad (2.42)$$

Минимизация по  $r_1, r_2, z$  проводится с помощью методов минимизации нелинейных функций – например с помощью метода градиентного спуска. Для этого удобно иметь выражение для производных от  $\tilde{\mathcal{X}}(r_1, r_2, z)$  по  $r_1, r_2, z$ . Обозначим эти производные как  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  соответственно. Они равны:

$$\partial_k \tilde{\mathcal{X}} = (\partial_k A^{inv}) B + A^{inv} \partial_k B, \quad k = 1, 2, 3.$$

Используя соотношение<sup>1</sup>:

$$\partial_k A^{\text{inv}} = -A^{\text{inv}}(\partial_k A)A^{\text{inv}}$$

и (2.39), получаем:

$$\partial_k \tilde{X} = A^{\text{inv}} \left[ -(\partial_k A)\tilde{X} + \partial_k B \right], \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.43)$$

Используя последнее выражение нетрудно продифференцировать уже и сам функционал невязки.

Приведем геометрическую интерпретацию невязок, минимальных по части параметров. Если множество

$$D = \{(r_1, r_2, z, X_1, X_2, X_3) : R(r_1, r_2, z, X_1, X_2, X_3) \leq \Delta_0\}$$

(где знак ":" означает "также, что"), то множество

$$D_{r_1 r_2 z} = \{(r_1, r_2, z) : \tilde{R}(r_1, r_2, z) \leq \Delta_0\}$$

– проекция  $D$  на трехмерную гиперплоскость  $r_1 r_2 z$ , а

$$D_{r_1} = \{r_1 : \tilde{R}(r_1, \tilde{r}_2(r_1), \tilde{z}(r_1)) \leq \Delta_0\}, \quad (2.44)$$

(где  $\tilde{r}_2(r_1)$ ,  $\tilde{z}(r_1)$  – те значения  $r_2$  и  $z$ , в которых достигает минимума  $\tilde{R}(r_1, r_2, z)$  при фиксированном  $r_1$ ) – это проекция  $D_{r_1 r_2 z}$  (и  $D$ ) на ось  $r_1$ .

#### *По шести параметрам*

В работе проведен анализ нормированной кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas, полученной в красном фильтре ( $\lambda = 6700\text{\AA}$ ), из работы Крона [19]. Наблюдаемая кривая блеска  $\xi_1 \dots \xi_{42}$  включала в себя  $M = 42$  точки. За оценки дисперсий каждого измерения наблюдаемой кривой блеска было принято значение в шкале звездных величин  $\sigma_m^{\text{obs}2} = 1.77 \cdot 10^{-6}$  [20], или соответственно в нашей шкале (шкале интенсивностей), с учетом того, что  $L^{\text{full}} = 1$ ,  $\sigma_m^{\text{obs}2} = 1.5015 \cdot 10^{-6}$ . Центральное значение каждой точки кривой блеска также получено усреднением  $N_m = 12$  точек, для  $m = 1 \dots 42$  (см. работы [14, 19]).

Методом МНК на основе анализа полной кривой блеска по всем шести параметрам получены центральные значения неизвестных параметров задачи:  $r_1 = 0.14408$ ,  $r_2 = 0.07556$ ,  $i = 88.27^\circ$ ,  $X_1 = 3.927$ ,  $X_2 = 2.696$ ,  $X_3 = 10.703$ . Методом дифференциальных поправок получены среднеквадратичные оценки дисперсий, с помощью формулы (2.11'). Найденная при этом по формуле (2.10') среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса  $v_0 = 0.003422904$ . Также, методом доверительных областей с помощью статистики Фишера, минимизированной по линейным параметрам (2.41), получены одномерные проекции доверительной области на уровне доверия  $\gamma = 0.6827$ . Например, для  $r_1$  такая проекция задается с помощью (2.44), то есть является решением неравенства. Соответственно, эти проекции вычислялись следующим образом: невязка (2.41)

<sup>1</sup>Соотношение получается дифференцированием тождества  $AA^{\text{inv}} = \mathbb{I}$ , где  $\mathbb{I}$  – единичная матрица.

Таблица 2.3: Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска двойной системы YZ Cas в рамках линейного закона потемнения к краю.

Метод	$r_1$	$r_2$	$i(^{\circ})$	$x_1$	$x_2$
Дифференциальных поправок ( $\sigma_{est}$ )	$0.14408 \pm 0.00023$	$0.07556 \pm 0.00038$	$88.27 \pm 0.090$	$0.300 \pm 0.021$	$0.41 \pm 0.12$
Доверительных областей, $\mathbf{F}_{M,N-M}(\gamma = 68.2\%)$	$0.1442 \pm 0.0011$	$0.0755 \pm 0.0022$	$88.37 \pm 0.57$	$0.29 \pm 0.12$	$0.20 \pm 0.77$

минимизировалась по двум нелинейным параметрам, и получившаяся величина, зависящая от одного оставшегося (искомого) нелинейного параметра (которым поочередно выступали  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i$ ) приравнивалась к квантилю (то есть находились два корня соответствующего уравнения). Эти результаты содержатся в табл.2.3.

Поскольку для исследования в рамках статистик с законом распределения  $\chi^2_P$  и  $\chi^2_M$  требуется знание дисперсии единицы веса  $\varepsilon_0$ , которая заранее точно неизвестна, то была исследована модельная двойная система, в которой значения фаз  $\theta_1 \dots \theta_{42}$  совпадали с фазами наблюдаемой кривой блеска YZ Cas. Истинные значения параметров двойной системы полагались равными центральным значениям, полученным при интерпретации наблюдаемой кривой блеска, т. е.  $\bar{r}_1 = 0.14408$ ,  $\bar{r}_2 = 0.07556$ ,  $\bar{i} = 88.27^{\circ}$ . Дисперсия единицы веса полагалась равной ее среднеквадратичной оценке  $v_0$ , полученной при интерпретации наблюдаемой кривой блеска, т.е.  $\varepsilon_0 = 0.003422904$ . Весовые коэффициенты  $w_m$  и количества измерений в каждой фазе  $N_1 \dots N_{42}$  были положены равными 12. Для данной модельной системы методом дифференциальных поправок получены дисперсии  $\sigma$  с помощью формулы (2.7'). Далее методом доверительных областей с помощью статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ , минимизированной по линейным параметрам (2.40), и с помощью статистики с законом распределения  $\chi^2_3$  (2.42) получены одномерные проекции доверительной области на уровне доверия  $\gamma = 0.6827$ . Полученные результаты по модельной кривой блеска YZ Cas содержатся в табл.2.4. В ходе численного эксперимента выполнена одна тысяча реализаций модельной кривой блеска YZ Cas  $\xi_1 \dots \xi_{42}$ . Проведен анализ каждой реализации модельной кривой блеска YZ Cas  $\xi_1 \dots \xi_{42}$  и подсчитано число попаданий истинных значений  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $i$  в интервалы ошибок полученные в рамках каждого исследуемого метода.

В табл.2.5 представлены результаты интерпретации кривой блеска двойной системы YZ Cas выполненными другими авторами.

Видно, что центральные значения радиусов компонентов  $r_1$ ,  $r_2$  и наклонение орбиты  $i$  в нашей работе находятся в хорошем согласии с прежними результатами (см. табл.2.5 и табл.2.3). Из этого можно сделать вывод, что разработанный алгоритм интерпретации кривой блеска двух сферических звезд можно полагать надежным. Кривая блеска, полученная в ходе интерпретации наблюдательных данных работы

Таблица 2.4: Фотометрические элементы модельной двойной системы YZ Cas.

Метод	$r_1$	$r_2$	$i(^{\circ})$
Дифференциальных поправок ( $\sigma$ )	$0.14422 \pm 0.00023$	$0.07557 \pm 0.00038$	$88.28 \pm 0.091$
Монте-Карло ( $\sigma$ )	$0.14422 \pm 0.00023$	$0.07557 \pm 0.00038$	$88.28 \pm 0.085$
Доверительных интервалов, ( $\gamma = 68.27\%$ )	$0.14450 \pm 0.00043$	$0.07579 \pm 0.00073$	$88.17 \pm 0.17$
Доверительных интервалов, ( $\gamma = 68.27\%$ )	$0.14448 \pm 0.0012$	$0.07564 \pm 0.0019$	$88.19 \pm 0.46$

Таблица 2.5: Фотометрические элементы двойной YZ Cas, полученные по анализу кривой блеска на длине волны  $\lambda = 6700\text{\AA}$  другими авторами.

$r_1$	$r_2$	$i(^{\circ})$	Ссылки
$0.1443 \pm .00046$	$0.0756 \pm .00015$	$88.18 \pm 0.057$	[19]
0.1428	0.0763	88.11	[21]
$0.14478 \pm .00021$	$0.07580 \pm .00042$	$88.617 \pm 0.038$	[22]
$0.1454 \pm .0009$	$0.0753 \pm .0003$	$88.47 \pm 0.01$	[23]
$0.151 \pm 0.002$	$0.0779 \pm 0.006$	$87.1 \pm 0.3$	[24]
0.144	0.0780	89.22	[25]
0.1466	0.080	88.4	[26]
$0.145 \pm 0.005$	$0.076 \pm 0.001$	$88.25 \pm 0.1$	[27]
$0.1442 \pm 1\%$	$0.0767 \pm 1\%$	$88.3 \pm 0.2$	[28]

[19] представлена на рис.2.1 и рис.2.2.

#### По двум параметрам

На основе разработанного алгоритма выполнен анализ наблюдаемой кривой блеска YZ Cas методом дифференциальных поправок, методом Монте-Карло, методом доверительных интервалов в статистике с законом распределения  $\chi^2_P$ ,  $\chi^2_M$  и  $\mathbf{F}_{M,N-M}$ . Помимо этого, проверена надежность интервалов ошибок вычисленных в рамках каждого метода. Для этого выполнена одна тысяча возмущений кривой блеска с "истинными" значениями параметров  $\bar{r}_1 = 0.14408$ ,  $\bar{r}_2 = 0.07556$ ,  $\bar{i} = 88.27^{\circ}$ , и дисперсией единицы веса  $\varepsilon_0 = 0.003422904$ . Проведен подсчет числа попаданий истинных значений в соответствующие доверительные области и их проекции.

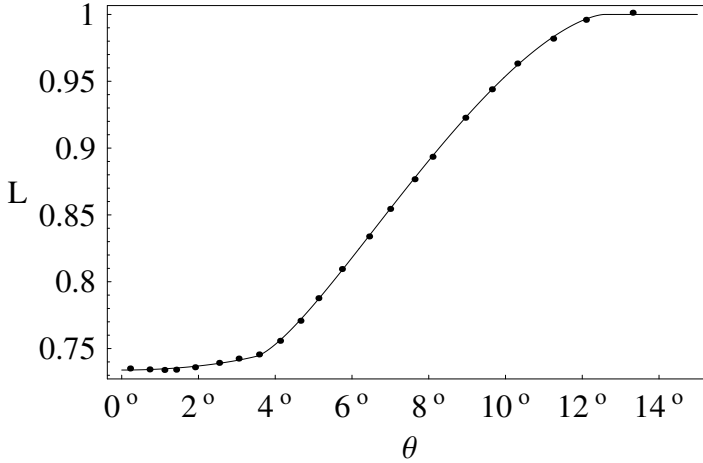


Рис 2.1: Главный минимум нормированной кривой блеска разделенной двойной системы YZ Cas. Точки – наблюдаемые значения блеска из работы [19]. Сплошная линия – оптимальная теоретическая кривая блеска, полученная на нашем алгоритме. Параметры представлены в табл.2.3.

Для наглядности и простоты сравнения результатов каждого из методов анализа кривой блеска задача интерпретации наблюдаемой кривой YZ Cas сведена к двух-параметрической. В первом случае полагались неизвестными радиусы компонент двойной  $r_1$  и  $r_2$ . Во втором случае полагались неизвестными радиус второй звезды  $r_2$  и наклонение орбиты двойной системы  $i$ . Значение остальных параметров полагались известными – использовались представленные выше центральные значения параметров двойной системы.

Результаты анализа кривой блеска в рамках двух-параметрической задачи представлены в табл.2.6 и табл.2.7. На рис.2.3 представлена доверительная область параметров  $r_1$  и  $r_2$ , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . На рис. 2.4 представлена доверительная область параметров  $r_1$  и  $i$ , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas также в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Видно, что размеры доверительной области в статистике с законом распределения  $\chi^2_M$  в среднем в 2 раза больше, чем в статистике с законом распределения  $\chi^2_P$ . Как показали численные расчеты число попаданий в доверительные области, полученные в статистиках  $\chi^2_P$  и  $\chi^2_M$  соответствует заданной вероятности  $\gamma = 68.2\%$ .

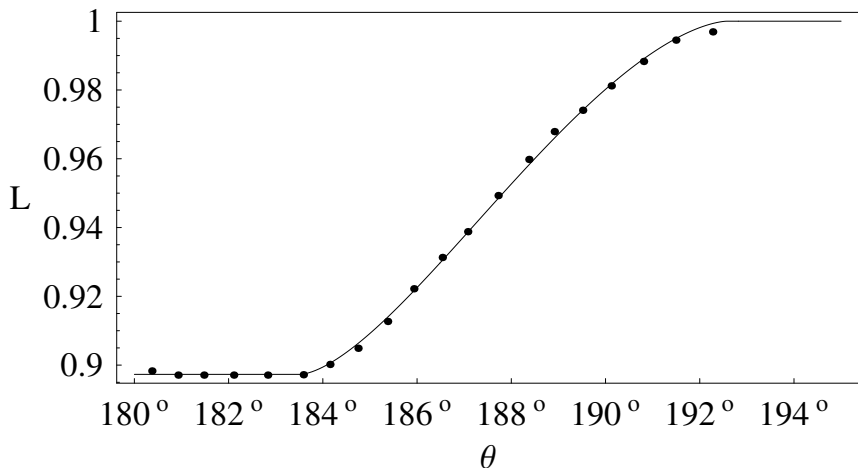


Рис 2.2: Вторичный минимум нормированной кривой блеска разделенной двойной системы YZ Cas. Точки – наблюдаемые значения блеска из работы [19]. Сплошная линия – оптимальная теоретическая кривая блеска, полученная на нашем алгоритме. Параметры представлены в табл.2.3.

Таблица 2.6: Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы [19] по двум параметрам - радиусам компонент.

Метод	$\Delta r_1/2; (N_{\Delta r_1})$	$\Delta r_2/2; (N_{\Delta r_2})$	N
Дифференциальных поправок	$0.6687 \cdot 10^{-4}; (687)$	$0.1089 \cdot 10^{-3}; (693)$	543
Монте-Карло	$0.6639 \cdot 10^{-4}; (683)$	$0.1082 \cdot 10^{-3}; (687)$	535
Доверительных интервалов, $\chi^2_P$	$1.013 \cdot 10^{-4}; (868)$	$0.1649 \cdot 10^{-3}; (870)$	687
Доверительных интервалов, $\chi^2_M$	$2.284 \cdot 10^{-4}; (714)$	$0.3720 \cdot 10^{-3}; (719)$	681
Доверительных интервалов, $\mathbf{F}_{M,N-M}$	$2.294 \cdot 10^{-4}; (717)$	$0.3737 \cdot 10^{-3}; (714)$	685



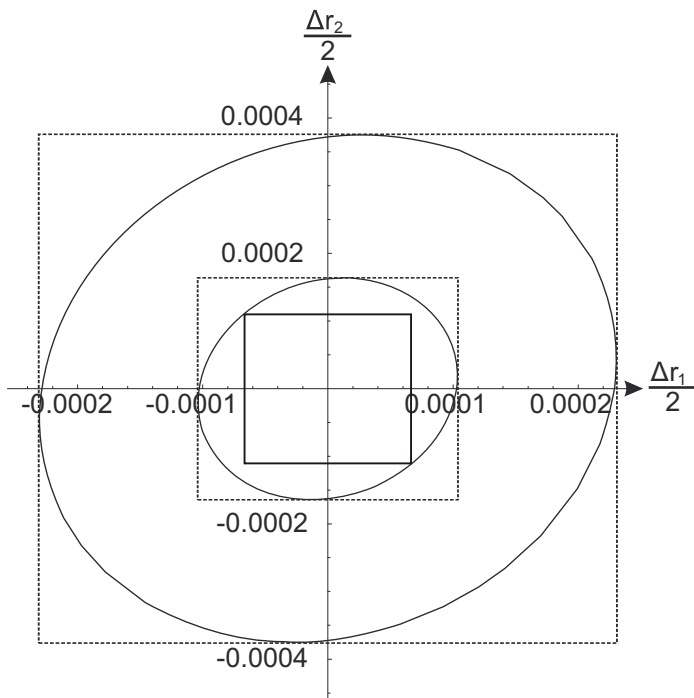


Рис 2.3: Доверительная область параметров  $r_1$  и  $r_2$ , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas из работы [19] в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  (малый эллипс) и  $\chi^2_M$  (большой эллипс). Пунктирные квадраты показывают параллелепипеды, объемлющие соответствующие доверительные области, габариты которых определяют проекции доверительной области на оси параметров  $r_1$  и  $r_2$ . Квадрат со сплошной границей – доверительная область, полученная в рамках метода дифференциальных поправок. Уровень доверия во всех случаях принят равным 95.5%.

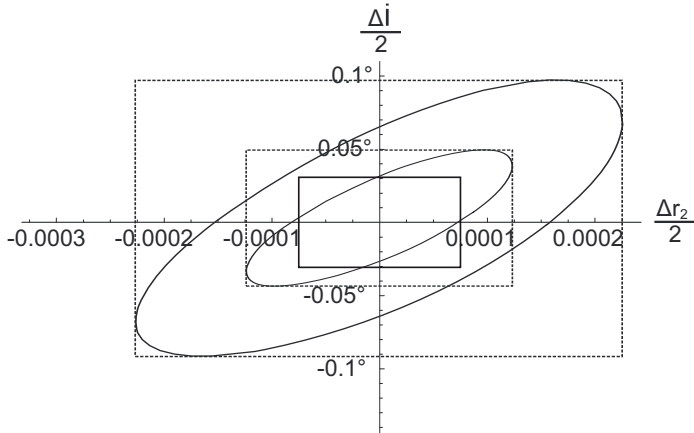


Рис 2.4: Доверительная область параметров  $r_2$  и  $i$ , полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas из работы [19] в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  (малый эллипс) и  $\chi^2_M$  (большой эллипс). Пунктирные прямоугольники показывают параллелепипеды, объемлющие соответствующим доверительные области, габариты которых определяют проекции доверительной области на оси параметров  $r_2$  и  $i$ . Квадрат со сплошной границей – доверительная область, полученная в рамках метода дифференциальных поправок. Уровень доверия во всех случаях принят равным 95.5%.

Таблица 2.7: Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы [19] по двум параметрам - радиусу второй звезды  $r_2$  и наклонению орбиты  $i$ .

Метод	$\Delta r_2/2; (N_{\Delta r_2})$	$i(^{\circ}); (N_i)$	N
Дифференциальных поправок	$0.7920 \cdot 10^{-4}; (675)$	$88.284 \pm 0.030; (696)$	(472)
Монте-Карло	$0.8021 \cdot 10^{-4}; (686)$	$88.270 \pm 0.029; (682)$	(491)
Доверительных интервалов, $\chi^2_P$	$1.203 \cdot 10^{-4}; (868)$	$88.282 \pm 0.047; (874)$	(676)
Доверительных интервалов, $\chi^2_M$	$2.226 \cdot 10^{-4}; (711)$	$88.292 \pm 0.086; (717)$	(683)
Доверительных интервалов, $\mathbf{F}_{M,N-M}$	$2.063 \cdot 10^{-4}; (720)$	$88.291 \pm 0.080; (716)$	(687)

## 2.6 Соотношение между интервалами ошибок, полученными разными методами

Как показывают численные эксперименты, в среднем величина интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , где  $M$  – число точек измерения (далее по тексту – метод  $\chi_M^2$ ), превышает интервал ошибки метода дифференциальных поправок в 3-5 раз. Также величина интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , в среднем превышает величину интервала ошибок, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_P^2$ , где  $P$  – число искомых параметров (далее по тексту – метод  $\chi_P^2$ ). При этом размеры доверительных интервалов, полученные в рамках метода наименьших квадратов с использованием точных значений дисперсии, и на основе статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ , не зависят от выборки случайных величин, в отличие от доверительных интервалов, которые получены в рамках метода на основе статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  и которые сами являются случайными величинами. В данной работе ниже приводится строгое аналитическое соотношение между интервалами ошибок в рамках вышеупомянутых методов для линейной модели. А именно, выводится функция  $a_p(t)$  распределения отношения случайной величины доверительного интервала в методе  $\chi_M^2$  к величине доверительного интервала в методе  $\chi_P^2$ . Величина доверительного интервала в методе  $\chi_P^2$  для одномерной задачи ( $P = 1$ ) совпадает с доверительным интервалом в рамках метода наименьших квадратов, а в случае произвольного  $P$  эти интервалы связаны определенной зависимостью (которая будет приведена ниже). Также исследуется поведение функции  $a_p(t)$  в зависимости от числа точек наблюдения  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$ .

Рассмотрим вначале одномерный случай. Рассмотрим невязку в однопараметрической линейной модели, квадратично зависящую от одного параметра  $\alpha$ . Также положим для удобства в модели  $\varepsilon_0 = 1$  (при этом нижесказанное остается справедливым при любом значении  $\varepsilon_0$ ). Указанную невязку можно записать в виде (что следует из (2.2), где квадратичные по  $\alpha$  члены не содержат случайных величин  $\xi$ ):

$$R^{lin}(\alpha, \xi) = C(\alpha - \alpha^c(\xi))^2 + R_{min}^{lin}(\xi), \quad (2.45)$$

где  $R_{min}^{lin}$  – ее минимальное значение по  $\alpha$ , достигаемое в  $\alpha^c(\xi)$ , а коэффициент  $C$  выражается определенным образом через заданные параметры модели ( $w$  и  $g$ ) и не зависит от выборки случайных величин  $\xi$ .

Определим квантиль  $\Delta_n(\gamma)$  для  $\gamma \in (0, 1)$  соотношением

$$\chi_n^2(\Delta_n(\gamma)) = \gamma,$$

то есть как функцию, обратную  $\chi_n^2$ .

В предыдущем разделе показано, что невязки распределены по следующему закону:

$$R^{lin}(\bar{\alpha}, \xi) - R_{min}^{lin}(\xi) \sim \chi_1^2, \quad (2.46)$$

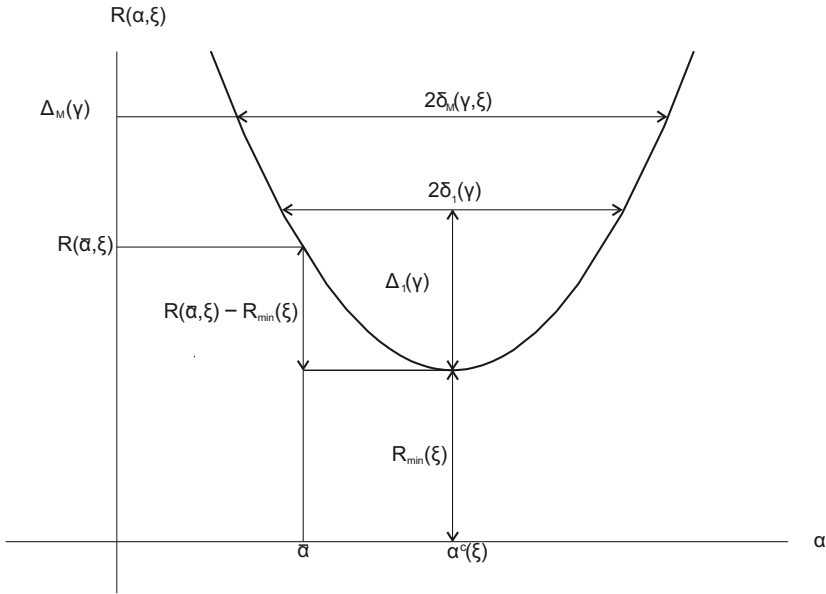


Рис 2.5: Однопараметрическая задача. Зависимость невязки  $R(\alpha, \xi)$  от параметра задачи  $\alpha$  при фиксированном значении вектора случайных величин  $\xi$  и основные статистические величины.  $R_{min}(\xi)$  - минимальное по параметру  $\alpha$  значение невязки  $R(\alpha, \xi)$ .  $\Delta_P(\gamma)$  ( $P = 1$ ) - квантиль распределения  $\chi_P^2$  ( $P = 1$ ).  $\Delta_M(\gamma)$  - квантиль распределения  $\chi_M^2$ .  $2\delta_1(\gamma)$ ,  $2\delta_M(\gamma, \xi)$  - ширина доверительных интервалов, полученных методами, использующими статистики  $R(\bar{\alpha}, \xi) - R_{min}(\xi)$ ,  $R(\bar{\alpha}, \xi)$  с законами распределения  $\chi_P^2$  ( $P = 1$ ) и  $\chi_M^2$  соответственно (более подробно см. текст работы).

$$R^{lin}(\bar{\alpha}, \xi) \sim \chi_M^2, \quad (2.47)$$

$$R_{min}^{lin}(\xi) \sim \chi_{M-1}^2, \quad (2.48)$$

где  $\bar{\alpha}$  - истинное значение параметра  $\alpha$ . Для наглядности на рис.2.5 изображена зависимость невязки  $R(\alpha, \xi)$  от искомого параметра задачи  $\alpha$  при фиксированной выборке случайных величин  $\xi$  и ее взаимосвязь с основными статистическими параметрами. Парабола, являющаяся графиком такой зависимости в случае линейной модели, при различных  $\xi$  может перемещаться в верхней полуплоскости, сохраняя при этом свою форму, так как коэффициент при квадратичном по  $\alpha$  члене не зависит от  $\xi$ .

Величина интервала ошибки, полученного методом  $\chi_1^2$  при заданном уровне доверия  $\gamma$ , определяется как расстояние между корнями квадратного уравнения

относительно  $\alpha$ :

$$C(\alpha - \alpha^c(\xi))^2 + R_{min}^{lin}(\xi) = R_{min}^{lin}(\xi) + \Delta_1(\gamma). \quad (2.49)$$

Обозначим половину величины указанного интервала за  $\delta_1(\gamma)$ . Очевидно, что  $\delta_1(\gamma)$  удовлетворяет соотношению:

$$C\delta_1^2(\gamma) = \Delta_1(\gamma) \quad (2.50)$$

и не зависит от выборки случайных величин  $\xi$ . Отсюда выражаем  $C$ :

$$C = \frac{\Delta_1(\gamma)}{\delta_1^2(\gamma)}. \quad (2.51)$$

Величина интервала ошибки, полученного методом  $\chi_M^2$  при заданном уровне доверия  $\gamma$ , является расстоянием между корнями квадратного уравнения относительно  $\alpha$ :

$$C(\alpha - \alpha^c(\xi))^2 + R_{min}^{lin}(\xi) = \Delta_M(\gamma) \quad (2.52)$$

Положим  $\delta_M(\gamma, \xi)$  равным половине величины указанного интервала в том случае, когда последнее уравнение имеет положительные корни (то есть соответствующее доверительное множество не пустое) и нулю в противном случае. При этом для положительных значений  $\delta_M(\gamma, \xi)$  справедливо соотношение:

$$C\delta_M^2(\gamma, \xi) + R_{min}^{lin}(\xi) = \Delta_M(\gamma). \quad (2.53)$$

$\delta_M(\gamma, \xi)$  зависит от случайных величин  $\xi$  и сама является случайной величиной. С учетом (2.48) получим, что

$$\Delta_M(\gamma) - C\delta_M^2(\gamma, \xi) \sim \chi_{M-1}^2. \quad (2.54)$$

Последнее выражение означает, что вероятность

$$\mathbf{P}(\Delta_M(\gamma) - C\delta_M^2(\gamma, \xi) < t) = \chi_{M-1}^2(t) \quad (2.55)$$

Путем несложных линейных и сдвиговых преобразований относительно  $t$ , а также используя (2.51), из последнего выражения получим:

$$\mathbf{P}\left(\frac{\delta_M^2(\gamma, \xi)}{\delta_1^2(\gamma)} > t\right) = \chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t) \quad (2.56)$$

При этом из (2.48) следует, что вероятность того, что  $\delta_M(\gamma, \xi) > 0$  (то есть того, что доверительный интервал окажется непустым для заданного уровня доверия  $\gamma$ ), равна  $\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))$ .

Соответствующая условная вероятность

$$\mathbf{P}\left(\delta_M(\gamma, \xi) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)} > t\right) = \frac{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)}{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))} \quad (2.57)$$

или

$$\mathbf{P}\left(\delta_M(\gamma, \xi) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)} \leq t\right) = 1 - \frac{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)}{\chi_{M-1}^2(\Delta_M(\gamma))}. \quad (2.58)$$

Правая часть последнего выражения представляет собой функцию распределения положительных значений величины  $\frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_1(\gamma)}$ , являющейся отношением доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , к соответствующему интервалу, полученному на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_1^2$  для заданного уровня доверия  $\gamma$ . Соответствующая плотность распределения  $a_1(t)$ , полученная дифференцированием функции распределения (с точностью до нормировочного коэффициента  $A_1$ ):

$$a_1(t) = A_1 \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(\Delta_1(\gamma)t^2 - \Delta_M(\gamma))} t (\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)t^2)^{\frac{M-3}{2}}, & 0 < t < \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}} \\ 0, & t \leq 0 \text{ или } t \geq \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}} \end{cases},$$

Эта функция достигает максимума при

$$t_{max1} = \sqrt{\frac{2 - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(2 - M)^2 + \Delta_M(\gamma)(-2M + \Delta_M(\gamma) + 8)}}{2\Delta_1(\gamma)}}. \quad (2.59)$$

При этом, поскольку задача одномерная, доверительный интервал  $\delta_1(\gamma)$  совпадает с интервалом, полученным методом наименьших квадратов для соответствующего уровня доверия.

Выше сказанное можно обобщить для случая модели с  $P$  параметрами, получив распределение отношения проекции доверительной области, полученной методом  $\chi_M^2$  к соответствующей проекции области, полученной методом  $\chi_P^2$ . Распределение соответствующих невязок:

$$R(\overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_P, \xi) - R_{min}(\xi) \sim \chi_P^2, \quad (2.60)$$

$$R(\overline{\alpha}_1 \dots \overline{\alpha}_P, \xi) \sim \chi_M^2, \quad (2.61)$$

$$R_{min}(\xi) \sim \chi_{M-P}^2. \quad (2.62)$$

Напомним, что под доверительным интервалом в методах  $\chi_P^2$  и  $\chi_M^2$  подразумевается проекция доверительной области, полученной на основе соответствующей статистики, на ось соответствующего параметра. Такая проекция находится как расстояние между корнями уравнения, полученного приравниванием невязки, минимизированной по всем параметрам кроме одного, к квантилю для выбранного уровня доверия.

Заменив во всем предыдущем выводе, кроме формул (2.46) и (2.47),  $R(\alpha, \xi)$  на  $P$ -параметрическую невязку, минимизированную по всем параметрам  $\alpha$ , кроме одного, а  $\chi_1^2$ ,  $\chi_{M-1}^2$ ,  $\Delta_1(\gamma)$  и  $\delta_1(\gamma)$  на  $\chi_P^2$ ,  $\chi_{M-P}^2$ ,  $\Delta_P(\gamma)$  и  $\delta_P(\gamma)$  соответственно, получим, что функция распределения равна

$$\mathbf{P} \left( \delta_M(\gamma) > 0 \mid \frac{\delta_M(\gamma)}{\delta_P(\gamma)} \leq t \right) = 1 - \frac{\chi_{M-P}^2 (\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)t^2)}{\chi_{M-P}^2 (\Delta_M(\gamma))}, \quad (2.63)$$

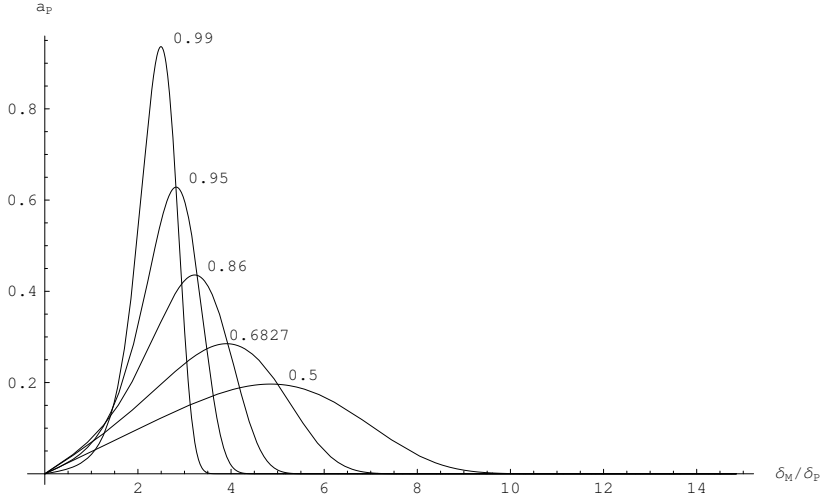


Рис 2.6: Функция плотности распределения отношения величины доверительного интервала  $\Delta(\chi_M^2)$ , полученного на основе статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ , при условии того, что доверительное множество непустое, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Случай одномерной функции,  $M = 101$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\gamma = 0.6827$ ,  $\gamma = 0.86$ ,  $\gamma = 0.95$ ,  $\gamma = 0.99$ .

а плотность распределения положительных значений  $\frac{\delta_M(\gamma)}{\delta_P(\gamma)}$  (с точностью до нормировочного коэффициента  $A_p$ ):

$$a_P(t) = A_p \begin{cases} e^{\frac{1}{2}(\Delta_P(\gamma)t^2 - \Delta_M(\gamma))} t (\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)t^2)^{\frac{M-P-2}{2}}, & 0 < t < \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}} \\ 0, & t \leq 0 \text{ или } t \geq \sqrt{\frac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}} \end{cases}$$

Максимумы данная функция достигает при

$$t_{maxP} = \sqrt{\frac{1 + P - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(1 + P - M)^2 + \Delta_M(\gamma)(2P - 2M - 2 + \Delta_M(\gamma) + 8)}}{2\Delta_P(\gamma)}}. \quad (2.64)$$

На рис.2.6 показано поведение функции плотности  $a_1(t)$  в зависимости от уровня доверия  $\gamma$  для метода  $\chi_M^2$ . Напомним, что в случае однопараметрической задачи проекция доверительной области, полученной на основе статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ , совпадает с доверительным интервалом, полученным методом наименьших квадратов. Из рис.2.6 видно, что наиболее вероятное значение отношения величины доверительного интервала полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$  к величине доверительного интервала, полученного

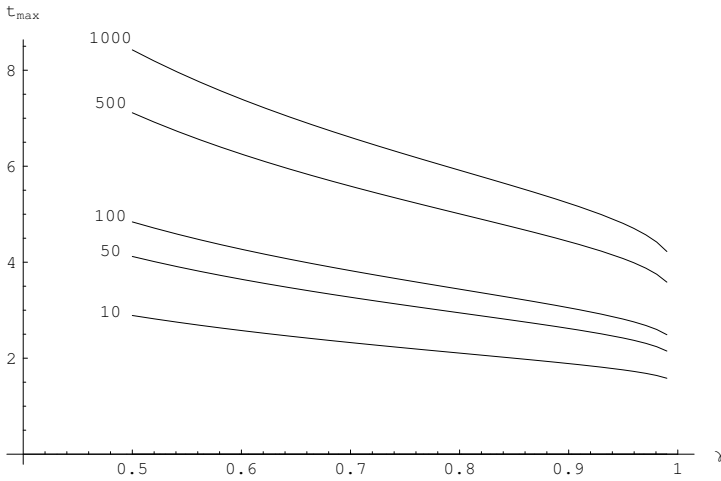


Рис. 2.7: Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от уровня доверия  $\gamma$  для числа наблюдательных точек  $M = 10$ ,  $M = 50$ ,  $M = 100$ ,  $M = 500$ ,  $M = 1000$ . Получено на основе одномерной линейной модельной функции (вид функции не важен, зависимость универсальная).

методом наименьших квадратов зависит от выбранного уровня доверия. Так при уровне доверия  $\gamma = 0.68$  наиболее вероятная величина доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$  превосходит величину доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов в  $\sim 4$  раза, а при уровне доверия  $\gamma = 0.99$  - в  $\sim 2.1$  раза. Расчет выполнен для значения  $M = 101$ .

Далее, исследовалось поведение максимума функции  $a_P(t)$  в зависимости от уровня доверия  $\gamma$  и размерности распределения  $\chi_M^2$ . На рис.2.7 представлен набор соответствующих зависимостей для значений  $M = 50, 100, 500$  и  $1000$ . Отметим, что для линейной модели зависимость имеет универсальный характер, то-есть не зависит от коэффициентов исследуемой линейной функции. Из рис.2.7 видно, что превышение величины наиболее вероятного доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , по отношению к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, растет (сравнительно слабо) с ростом размерности  $M$  распределения  $\chi_M^2$  (то есть числа наблюдаемых точек  $M$ ). Из рис.2.7 также следует, что с ростом уровня доверия  $\gamma$  значение отношения величины наиболее вероятного доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов,



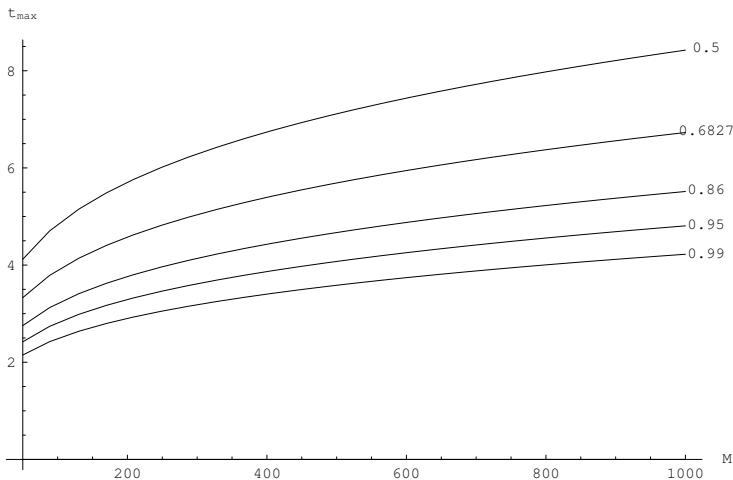


Рис 2.8: Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от числа точек  $M$  при фиксированном уровне доверия для  $\gamma = 0.5$ ,  $\gamma = 0.6827$ ,  $\gamma = 0.86$ ,  $\gamma = 0.95$ ,  $\gamma = 0.99$ .

уменьшается. Данная зависимость показана на рис.2.8.

Возникает вопрос: почему доверительные интервалы в методах дифференциальных поправок (который в случае линейной модели тождествен методу наименьших квадратов) и Монте-Карло в несколько раз меньше наиболее вероятного значения доверительных интервалов, полученных на основе статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ ? В случае одномерной модели ( $P=1$ ) проблема проектирования доверительной области на ось параметра не возникает, и различие доверительных интервалов, очевидно, связано с двумя обстоятельствами:

1. При использовании статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$  (то есть невязки), не делается изначального предположения о том, что используемая модель идеально верна. На практике это означает, что поверхность функционала невязки (см. рис.2.5) в случае статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  для разных реализаций наблюдательных данных может смещаться как вдоль оси параметров ("в горизонтальном направлении"), так и вдоль оси значений функционала невязки ("в вертикальном направлении"). Для некоторых реализаций наблюдательных данных при этом доверительная область может даже вырождаться в пустое множество (число таких случаев должно быть близко к значению принятого уровня значимости  $\alpha = 1 - \gamma$ ). В случае статистики, распределенной по закону  $\chi_P^2$  (в котором предполагается, что модель идеально верна), поверхность функционала невязки (рис.2.5), для разных реализаций наблюдательных данных может смещаться

лишь вдоль оси параметров (в "горизонтальном" направлении). Соответствующая доверительная область никогда не вырождается в пустое множество.

2. Распределение интервалов, построенных на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , полученное в условном предположении об адекватности модели в методе с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  и при прочих равных условиях, шире (см.рис.2.6) чем нормальное распределение найденных центральных значений параметров, используемое в методе дифференциальных поправок (в котором модель по определению предполагается адекватной). При этом характерными параметрами этих распределений являются в первом случае наиболее вероятное значение интервала ошибок, полученного на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , а во втором - стандартное отклонение, умноженное на коэффициент, соответствующий выбранному уровню доверия (что в случае одномерной модели совпадает с интервалом, полученным на основе статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ ). Параметр  $t_{max}$  является отношением первого из этих параметров ко второму.

3. В случае многопараметрической задачи ( $P > 1$ ) к указанным причинам добавляется эффект, связанный с необходимостью проектирования многомерной (в пространстве параметров) доверительной области на оси параметров. Это необходимо делать для того, чтобы перейти от "точной" доверительной области к значениям доверительных интервалов. Поскольку при таком проектировании доверительная область заменяется объемлющим ее параллелепипедом, объем которого больше, соответствующая вероятность накрытия точного решения дополнительно возрастает.

Кроме того, следует иметь ввиду, что в случае определения ошибок параметров методом дифференциальных поправок для многопараметрической модели истинное значение каждого из искомых параметров попадает в соответствующий интервал ошибок с заданной вероятностью независимо от попадания истинных значений других искомых параметров в их интервалы ошибок. Возникает вопрос - какова вероятность совместного попадания искомых параметров во все интервалы ошибок. Естественно потребовать, чтобы эта вероятность была не меньше заданного уровня доверия. Если рассматривать совокупность центральных значений параметров как  $P$ -мерную случайную величину, принимающую значения в  $P$ -мерном пространстве искомых параметров  $\beta_1 \dots \beta_P$ , то попадание истинного значения  $\bar{\beta}_i$  одного из искомых параметров  $\beta_i$  в соответствующий интервал ошибок будет означать попадание точки, соответствующей совокупности истинных значений, в область между двумя  $P - 1$ -мерными гиперплоскостями  $\beta_i = \beta_i^c - \kappa\sigma_i$  и  $\beta_i = \beta_i^c + \kappa\sigma_i$  ( $\kappa$  - коэффициент, соответствующий выбранному уровню доверия). То есть метод дифференциальных поправок можно рассматривать как нахождение  $P$ -мерной доверительной области упомянутого вида. При этом совокупное попадание истинных значений искомых параметров в соответствующие интервалы ошибок означает попадание точки, соответствующей совокупности истинных значений параметров в  $P$ -мерный параллелепипед с центром в точке  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$ , и размерами ребер  $2\kappa\sigma_1, \dots, 2\kappa\sigma_P$ . Очевидно, что вероятность попадания совокупности истинных значений в такой параллелепипед будет меньше чем вероятность независимого попадания истинных значений параметров в соответствующие интервалы ошибок, то есть меньше

заданной вероятности. А для того чтобы точка в  $P$ -мерном пространстве искомым параметров, соответствующая совокупности истинных значений параметров, попадала с заданной вероятностью  $\gamma$  в  $P$ -мерный параллелепипед с центром в точке  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$  и со сторонами, пропорциональными по размеру  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$ , то есть для того чтобы с заданной вероятностью  $\gamma$  истинные значения искомым параметров попадали в соответствующие интервалы одновременно, такие интервалы (размеры ребер  $P$ -мерного параллелепипеда) необходимо выбирать как  $k\sigma_i$ , где  $k > 1$ . Вероятность же попадания  $P$ -мерной случайной точки в  $P$ -мерный параллелепипед равна  $P$ -кратному интегралу от многомерной плотности распределения по упомянутому параллелепипеду. При этом существенно то, что для определения вида этой функции плотности (и нахождения соответствующего интеграла от нее) недостаточно знания одних только стандартных отклонений случайных величин  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$ . В случае модели, линейно зависящей от параметров  $\beta_1, \dots, \beta_P$  (центральные значения которых  $\beta_1^c, \dots, \beta_P^c$  распределены по закону Гаусса), такой функцией распределения будет

$$f(\beta_1, \dots, \beta_P) = Ke^{-\sum_{i,j=1}^P A_{ij}(\beta_i - \bar{\beta}_i)(\beta_j - \bar{\beta}_j)} \quad (2.65)$$

где  $K$  – нормировочный коэффициент, а матрица  $A$  является обратной по отношению к матрице ковариаций  $\text{cov}(\beta_i, \beta_j)$ <sup>1</sup>. Таким образом, даже в линейной модели (или в линейном приближении) для определения вероятности совокупного попадания истинных значений искомым интервалов в их интервалы ошибок (или обратной задачи нахождения коэффициента  $k$ ) необходимо знать ковариации центральных значений. А при одних и тех же значениях стандартных отклонений  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$  в разных случаях вероятности совокупного попадания (или коэффициента  $k$ ) могут быть различными. Однако, в любом случае  $k\sigma_i$  будет меньше чем соответствующие проекции доверительной области, полученной в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  для данного уровня доверия  $\gamma$ <sup>2</sup>. Например, на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ . (т. е. при  $\kappa = 2$ ) проекция доверительной области, полученной в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  ( $P$  – число искомым параметров) в случае 4-параметрической модели  $\Delta_P = 3.12\sigma$ , а в 5-параметрической модели  $\Delta_P = 3.36\sigma$ ). Таким образом, при уровне доверия "2 $\sigma$ " ( $\gamma = 0.955$ ..)  $k \lesssim 1.56$  для 4-параметрической линейной модели и  $k \lesssim 1.68$  для 5-параметрической линейной модели. Подчеркнем, что при уровне доверия "1 $\sigma$ " ( $\gamma = 0.68$ ) величина  $k \lesssim 2.17$  для 4-параметрической модели и  $k \lesssim 2.42$  для 5-параметрической модели.

Таким образом, выбирая уровень доверия  $\gamma$  для доверительных интервалов, мы должны помнить, что вероятность  $P$  накрытия точного решения соответствующей доверительной областью в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло

<sup>1</sup>Можно отметить, что показатель экспоненты в (2.65) равен разности функционала невязки как функции искомым параметров и минимального значения этого функционала. И каждая поверхность уровня функции  $f$  (представляющая собой  $P$ -мерный эллипсоид) ограничивает доверительную область, полученную при некотором уровне доверия в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ .

<sup>2</sup>Поскольку эти проекции являются измерениями  $P$ -мерного параллелепипеда, пропорциональными  $\sigma_1, \dots, \sigma_P$ , и содержат истинные значения искомым параметров с вероятностью большей чем  $\gamma$

$P < \gamma$ , а в методе  $\chi_M^2$  вероятность накрытия точного решения соответствующим параллелепипедом, объемлющим "точную" доверительную область,  $P > \gamma$ . При этом в методе  $\chi_M^2$  вероятность накрытия точного решения соответствующей доверительной областью  $P = \gamma$ .

В случае нелинейной модели еще одной причиной, которая может быть причиной занижения интервалов ошибок, полученных методом дифференциальных поправок, может быть применение процедуры линеаризации. Но в случае с используемой нами моделью указанный фактор не оказывает существенного влияния на полученные результаты - об этом говорит то, что оценки дисперсий, полученные методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло существенно не различаются. Различие же в несколько раз величин интервалов, полученных разными методами - обусловлено именно использованием различных статистик, а также различием предположений о верности моделей.

### *Новый метод оценки ошибок параметров*

Таким образом, в случае если зависимость функции, описывающей модель, от искоемых параметров линейная, формулы (2.59) и (2.64) позволяют на основе метода Монте-Карло или дифференциальных поправок, путем домножения на коэффициент  $t_{max}$  (или  $k_{pt}t_{max}$  - см. ниже), получить тот размер интервала ошибки искомого параметра в рамках метода доверительных областей, построенных на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , который является наиболее вероятным среди случаев, в которых модель не может быть отвергнута. Получив размер интервала ошибки методом Монте-Карло или дифференциальных поправок и убедившись, что модель адекватна в рамках метода, основанного на использовании статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  (для чего достаточно вычислить минимальное значение соответствующей невязки), мы можем сделать предварительные выводы вероятностного характера о размере доверительного интервала, полученного на основе статистике с законом распределения  $\chi_M^2$ , не прибегая непосредственно к более трудоемкому определению размеров проекции доверительной области на ось параметра.

Подчеркнем еще раз, что параметр  $t_{max}$  является наиболее вероятным значением отношения проекции доверительной области, полученной методом  $\chi_M^2$  к соответствующей проекции области, полученной методом  $\chi_P^2$ . Как уже отмечалось, в случае одномерной задачи величина проекции доверительной области, полученной методом  $\chi_P^2$  равна величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Поэтому можно сказать, что значение параметра  $t_{max}$  для одномерной задачи - это наиболее вероятное значение отношения проекции доверительной области, полученной методом  $\chi_M^2$  к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Значения параметра  $t_{max}$  для одномерной задачи приведены в табл.2.8.

Из табл.2.8 видно, что  $t_{max}$  значительно отличается от единицы, что говорит о занижении ошибки параметра полученной в рамках метода дифференциальных поправок (в статистике нормального распределения).

В табл.2.9 - 2.12 приведено значение  $t_{max}$  для многопараметрической задачи с  $P = 3, 6, 10$  и  $50$ . В случае многомерной задачи величина проекции

Таблица 2.8: Параметр  $t_{max}$  для однопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 1$ . В этом случае доверительный интервал, полученный на основе статистики с законом распределения статистике с законом распределения  $\chi^2_P$ , совпадает с доверительным интервалом полученным методом дифференциальных поправок.

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	8.49	5.20	3.98	3.32	2.89	2.58	2.33	2.11	1.89	1.76	1.58
20	10.4	6.21	4.68	3.87	3.35	2.98	2.68	2.42	2.16	2.01	1.79
30	11.7	6.89	5.16	4.25	3.67	3.25	2.92	2.64	2.35	2.18	1.94
40	12.7	7.41	5.53	4.54	3.92	3.47	3.11	2.81	2.50	2.31	2.05
50	13.5	7.84	5.84	4.79	4.12	3.64	3.27	2.95	2.62	2.42	2.15
60	14.1	8.22	6.10	5.00	4.30	3.80	3.41	3.07	2.73	2.52	2.23
70	14.7	8.54	6.34	5.18	4.45	3.93	3.53	3.17	2.82	2.60	2.31
80	15.3	8.84	6.55	5.35	4.59	4.06	3.63	3.27	2.90	2.68	2.37
90	15.8	9.11	6.74	5.50	4.72	4.17	3.73	3.36	2.98	2.75	2.43
100	16.2	9.35	6.92	5.64	4.84	4.27	3.82	3.44	3.05	2.81	2.49
200	19.5	11.1	8.20	6.67	5.70	5.02	4.49	4.03	3.57	3.29	2.90
300	21.7	12.3	9.06	7.36	6.29	5.53	4.94	4.44	3.93	3.61	3.18
400	23.3	13.3	9.73	7.89	6.74	5.93	5.29	4.75	4.20	3.87	3.40
500	24.7	14.0	10.3	8.33	7.11	6.25	5.58	5.01	4.43	4.08	3.58
600	25.9	14.7	10.8	8.71	7.44	6.54	5.83	5.23	4.63	4.26	3.74
700	26.9	15.3	11.2	9.05	7.72	6.78	6.06	5.43	4.80	4.41	3.88
800	27.9	15.8	11.6	9.35	7.98	7.01	6.25	5.61	4.96	4.56	4.00
900	28.7	16.3	11.9	9.63	8.21	7.21	6.43	5.77	5.10	4.69	4.12
1000	29.5	16.7	12.2	9.88	8.42	7.40	6.60	5.92	5.23	4.81	4.22
1500	32.7	18.5	13.5	10.9	9.31	8.17	7.29	6.53	5.77	5.30	4.65
2000	35.2	19.9	14.5	11.7	9.99	8.77	7.82	7.00	6.19	5.68	4.99
2500	37.2	21.0	15.3	12.4	10.6	9.26	8.26	7.39	6.53	6.00	5.27
3000	39.0	22.0	16.1	13.0	11.0	9.68	8.63	7.73	6.83	6.27	5.50
3500	40.5	22.9	16.7	13.5	11.5	10.1	8.97	8.03	7.09	6.52	5.71
4000	41.9	23.6	17.2	13.9	11.9	10.4	9.27	8.30	7.33	6.73	5.90
4500	43.2	24.4	17.8	14.3	12.2	10.7	9.54	8.54	7.54	6.93	6.08
5000	44.4	25.0	18.2	14.7	12.5	11.0	9.79	8.77	7.74	7.11	6.23
5500	45.4	25.6	18.7	15.1	12.8	11.2	10.0	8.98	7.93	7.28	6.38
6000	46.4	26.2	19.1	15.4	13.1	11.5	10.2	9.17	8.10	7.44	6.52
6500	47.4	26.7	19.5	15.7	13.4	11.7	10.4	9.35	8.26	7.58	6.65
7000	48.3	27.2	19.8	16.0	13.6	11.9	10.6	9.53	8.41	7.72	6.77
7500	49.1	27.7	20.2	16.3	13.9	12.1	10.8	9.69	8.56	7.86	6.89
8000	49.9	28.1	20.5	16.5	14.1	12.3	11.0	9.84	8.69	7.98	7.00
8500	50.7	28.6	20.8	16.8	14.3	12.5	11.2	9.99	8.82	8.10	7.10
9000	51.4	29.0	21.1	17.0	14.5	12.7	11.3	10.1	8.95	8.22	7.20
9500	52.1	29.4	21.4	17.3	14.7	12.9	11.5	10.3	9.07	8.33	7.30
10000	52.8	29.7	21.7	17.5	14.9	13.0	11.6	10.4	9.19	8.43	7.39

Таблица 2.9: Параметр  $t_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 3$ . Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или метода Монте-Карло необходимо использовать величину  $k_{prt_{max}}$ , где значения  $k_P$  приведены в табл.2.13.

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.71	1.60	1.55	1.51	1.48	1.45	1.42	1.39	1.35	1.32	1.28
20	1.93	1.78	1.71	1.67	1.64	1.61	1.59	1.56	1.52	1.48	1.43
30	2.10	1.92	1.84	1.79	1.76	1.73	1.71	1.68	1.63	1.60	1.54
40	2.24	2.03	1.94	1.89	1.86	1.83	1.80	1.77	1.72	1.69	1.62
50	2.36	2.13	2.03	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.80	1.76	1.69
60	2.46	2.21	2.11	2.05	2.01	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.75
70	2.56	2.29	2.18	2.11	2.07	2.04	2.01	1.98	1.93	1.89	1.81
80	2.64	2.36	2.24	2.17	2.13	2.10	2.07	2.03	1.98	1.94	1.86
90	2.71	2.42	2.30	2.23	2.18	2.15	2.12	2.08	2.03	1.99	1.90
100	2.78	2.48	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.13	2.07	2.03	1.95
200	3.30	2.91	2.74	2.65	2.59	2.55	2.51	2.47	2.41	2.36	2.26
300	3.64	3.20	3.01	2.90	2.84	2.79	2.75	2.70	2.64	2.58	2.47
400	3.91	3.43	3.22	3.10	3.03	2.98	2.93	2.88	2.81	2.75	2.63
500	4.13	3.62	3.39	3.27	3.19	3.13	3.09	3.03	2.96	2.90	2.77
600	4.32	3.78	3.54	3.41	3.33	3.27	3.22	3.16	3.09	3.02	2.89
700	4.49	3.93	3.68	3.54	3.45	3.39	3.34	3.28	3.20	3.13	2.99
800	4.64	4.05	3.80	3.65	3.56	3.50	3.44	3.38	3.30	3.23	3.09
900	4.78	4.17	3.90	3.75	3.66	3.59	3.54	3.48	3.39	3.32	3.18
1000	4.91	4.28	4.00	3.85	3.75	3.68	3.63	3.57	3.48	3.40	3.25
1500	5.43	4.73	4.42	4.24	4.13	4.06	3.99	3.93	3.83	3.75	3.58
2000	5.83	5.07	4.74	4.55	4.43	4.35	4.28	4.20	4.10	4.01	3.84
2500	6.17	5.36	5.00	4.80	4.67	4.58	4.51	4.44	4.33	4.23	4.05
3000	6.45	5.60	5.23	5.02	4.88	4.79	4.71	4.64	4.52	4.42	4.23
3500	6.71	5.82	5.43	5.21	5.07	4.97	4.89	4.81	4.70	4.59	4.39
4000	6.93	6.02	5.61	5.38	5.24	5.14	5.05	4.97	4.85	4.74	4.53
4500	7.14	6.19	5.78	5.54	5.39	5.29	5.20	5.11	4.99	4.88	4.66
5000	7.33	6.36	5.93	5.68	5.53	5.42	5.34	5.25	5.12	5.01	4.78
5500	7.51	6.51	6.07	5.82	5.66	5.55	5.46	5.37	5.24	5.13	4.90
6000	7.67	6.65	6.20	5.94	5.78	5.67	5.58	5.48	5.35	5.24	5.00
6500	7.83	6.78	6.32	6.06	5.90	5.78	5.69	5.59	5.46	5.34	5.10
7000	7.97	6.91	6.44	6.17	6.01	5.89	5.79	5.69	5.56	5.44	5.19
7500	8.11	7.03	6.55	6.28	6.11	5.99	5.89	5.79	5.65	5.53	5.28
8000	8.24	7.14	6.65	6.38	6.21	6.08	5.99	5.88	5.74	5.62	5.37
8500	8.37	7.25	6.75	6.48	6.30	6.18	6.07	5.97	5.83	5.70	5.45
9000	8.49	7.35	6.85	6.57	6.39	6.26	6.16	6.06	5.91	5.78	5.52
9500	8.60	7.45	6.94	6.66	6.47	6.35	6.24	6.14	5.99	5.86	5.60
10000	8.72	7.55	7.03	6.74	6.56	6.43	6.32	6.21	6.06	5.93	5.67

Таблица 2.10: Параметр  $t_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 6$ . Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или метода Монте-Карло необходимо использовать величину  $k_{prt_{max}}$ , где значения  $k_P$  приведены в табл.2.13.

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.23	1.22	1.21	1.20	1.19	1.18	1.17	1.16	1.15	1.14	1.13
20	1.22	1.24	1.25	1.26	1.27	1.27	1.27	1.27	1.27	1.26	1.24
30	1.26	1.28	1.30	1.32	1.33	1.34	1.35	1.35	1.35	1.34	1.33
40	1.31	1.32	1.34	1.36	1.38	1.39	1.40	1.41	1.41	1.41	1.39
50	1.35	1.36	1.39	1.41	1.43	1.44	1.45	1.46	1.47	1.46	1.45
60	1.40	1.40	1.42	1.45	1.47	1.48	1.50	1.51	1.52	1.51	1.50
70	1.43	1.44	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1.55	1.56	1.56	1.54
80	1.47	1.47	1.49	1.51	1.54	1.56	1.57	1.59	1.60	1.60	1.58
90	1.50	1.50	1.52	1.54	1.57	1.59	1.61	1.62	1.63	1.63	1.62
100	1.54	1.53	1.55	1.57	1.60	1.62	1.64	1.65	1.67	1.66	1.65
200	1.78	1.75	1.76	1.79	1.82	1.84	1.87	1.89	1.91	1.91	1.90
300	1.94	1.91	1.92	1.94	1.97	2.00	2.03	2.06	2.08	2.08	2.07
400	2.08	2.03	2.04	2.06	2.09	2.12	2.16	2.19	2.21	2.22	2.20
500	2.19	2.14	2.14	2.16	2.19	2.23	2.26	2.30	2.32	2.33	2.31
600	2.28	2.23	2.23	2.25	2.28	2.32	2.35	2.39	2.42	2.42	2.41
700	2.37	2.30	2.31	2.33	2.36	2.40	2.44	2.47	2.50	2.51	2.49
800	2.44	2.38	2.38	2.40	2.43	2.47	2.51	2.55	2.58	2.59	2.57
900	2.51	2.44	2.44	2.46	2.50	2.54	2.58	2.61	2.65	2.66	2.64
1000	2.58	2.50	2.50	2.52	2.56	2.60	2.64	2.68	2.71	2.72	2.70
1500	2.84	2.75	2.74	2.77	2.80	2.85	2.89	2.94	2.98	2.99	2.97
2000	3.04	2.95	2.94	2.96	3.00	3.04	3.09	3.14	3.18	3.19	3.18
2500	3.21	3.11	3.09	3.12	3.16	3.20	3.26	3.31	3.35	3.37	3.35
3000	3.36	3.25	3.23	3.25	3.29	3.34	3.40	3.45	3.50	3.52	3.50
3500	3.49	3.37	3.35	3.37	3.42	3.47	3.52	3.58	3.63	3.65	3.63
4000	3.60	3.48	3.46	3.48	3.53	3.58	3.64	3.70	3.75	3.77	3.75
4500	3.71	3.58	3.56	3.58	3.63	3.68	3.74	3.80	3.86	3.87	3.85
5000	3.81	3.67	3.65	3.67	3.72	3.77	3.84	3.90	3.95	3.97	3.95
5500	3.90	3.76	3.74	3.76	3.80	3.86	3.92	3.99	4.05	4.06	4.04
6000	3.98	3.84	3.82	3.84	3.88	3.94	4.01	4.07	4.13	4.15	4.13
6500	4.06	3.91	3.89	3.91	3.96	4.02	4.08	4.15	4.21	4.23	4.21
7000	4.13	3.99	3.96	3.98	4.03	4.09	4.16	4.23	4.29	4.31	4.29
7500	4.20	4.05	4.03	4.05	4.10	4.16	4.23	4.30	4.36	4.38	4.36
8000	4.27	4.12	4.09	4.11	4.16	4.22	4.29	4.36	4.43	4.45	4.43
8500	4.34	4.18	4.15	4.17	4.22	4.29	4.36	4.43	4.49	4.51	4.49
9000	4.40	4.24	4.21	4.23	4.28	4.35	4.42	4.49	4.56	4.58	4.55
9500	4.46	4.29	4.27	4.29	4.34	4.40	4.48	4.55	4.62	4.64	4.61
10000	4.51	4.35	4.32	4.34	4.39	4.46	4.53	4.61	4.67	4.70	4.67

Таблица 2.11: Параметр  $t_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 10$ . Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или метода Монте-Карло необходимо использовать величину  $k_{pt_{max}}$ , где значения  $k_P$  приведены в табл.2.13.

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	1.16	1.13	1.12	1.10	1.09	1.08	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04
20	1.08	1.10	1.12	1.13	1.13	1.14	1.14	1.14	1.14	1.14	1.13
30	1.05	1.10	1.13	1.15	1.16	1.18	1.19	1.19	1.20	1.20	1.20
40	1.06	1.11	1.15	1.17	1.19	1.21	1.22	1.24	1.25	1.25	1.25
50	1.07	1.12	1.16	1.19	1.22	1.24	1.26	1.27	1.29	1.30	1.30
60	1.08	1.14	1.18	1.21	1.24	1.27	1.29	1.31	1.32	1.33	1.34
70	1.09	1.15	1.20	1.23	1.27	1.29	1.32	1.34	1.36	1.37	1.37
80	1.11	1.17	1.21	1.25	1.29	1.32	1.34	1.36	1.39	1.40	1.40
90	1.13	1.18	1.23	1.27	1.31	1.34	1.36	1.39	1.41	1.43	1.43
100	1.14	1.20	1.25	1.29	1.32	1.36	1.39	1.41	1.44	1.45	1.46
200	1.28	1.33	1.38	1.43	1.47	1.51	1.55	1.59	1.63	1.65	1.66
300	1.38	1.42	1.48	1.53	1.58	1.62	1.67	1.71	1.76	1.78	1.81
400	1.46	1.50	1.56	1.61	1.66	1.71	1.76	1.81	1.86	1.89	1.92
500	1.53	1.57	1.62	1.68	1.73	1.79	1.84	1.90	1.95	1.98	2.01
600	1.59	1.63	1.68	1.74	1.80	1.85	1.91	1.97	2.03	2.06	2.09
700	1.64	1.68	1.74	1.79	1.85	1.91	1.97	2.03	2.09	2.13	2.16
800	1.69	1.73	1.79	1.84	1.91	1.97	2.03	2.09	2.15	2.19	2.22
900	1.74	1.78	1.83	1.89	1.95	2.01	2.08	2.14	2.21	2.25	2.28
1000	1.78	1.82	1.87	1.93	2.00	2.06	2.12	2.19	2.26	2.30	2.34
1500	1.95	1.99	2.04	2.11	2.18	2.25	2.32	2.39	2.47	2.52	2.56
2000	2.08	2.12	2.18	2.24	2.32	2.39	2.47	2.55	2.64	2.69	2.73
2500	2.20	2.23	2.29	2.36	2.44	2.52	2.60	2.68	2.77	2.83	2.88
3000	2.29	2.33	2.39	2.46	2.54	2.62	2.71	2.80	2.89	2.95	3.00
3500	2.38	2.41	2.47	2.55	2.63	2.71	2.80	2.90	3.00	3.06	3.11
4000	2.46	2.49	2.55	2.63	2.71	2.80	2.89	2.99	3.09	3.15	3.21
4500	2.53	2.56	2.62	2.70	2.78	2.88	2.97	3.07	3.18	3.24	3.30
5000	2.59	2.62	2.69	2.77	2.85	2.95	3.04	3.15	3.26	3.32	3.39
5500	2.65	2.68	2.75	2.83	2.92	3.01	3.11	3.22	3.33	3.40	3.46
6000	2.71	2.74	2.80	2.89	2.98	3.07	3.18	3.28	3.40	3.47	3.54
6500	2.76	2.79	2.86	2.94	3.03	3.13	3.24	3.35	3.47	3.54	3.60
7000	2.81	2.84	2.91	2.99	3.09	3.19	3.29	3.41	3.53	3.60	3.67
7500	2.85	2.89	2.96	3.04	3.14	3.24	3.35	3.46	3.59	3.66	3.73
8000	2.90	2.93	3.00	3.09	3.18	3.29	3.40	3.51	3.64	3.72	3.79
8500	2.94	2.97	3.04	3.13	3.23	3.34	3.45	3.57	3.69	3.77	3.84
9000	2.98	3.01	3.09	3.17	3.27	3.38	3.49	3.61	3.75	3.82	3.90
9500	3.02	3.05	3.13	3.22	3.32	3.43	3.54	3.66	3.79	3.87	3.95
10000	3.06	3.09	3.16	3.26	3.36	3.47	3.58	3.71	3.84	3.92	4.00



Таблица 2.12: Параметр  $t_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 50$ . Для перехода к доверительному интервалу, полученному методом дифференциальных поправок или метода Монте-Карло необходимо использовать величину  $k_{pt_{max}}$ , где значения  $k_P$  приведены в табл.2.13.

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
50	1.03	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.01	1.01
60	1.01	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03
70	1.00	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.04
80	0.991	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05	1.05
90	0.982	1.00	1.01	1.02	1.03	1.03	1.04	1.05	1.05	1.06	1.07
100	0.973	0.996	1.01	1.02	1.03	1.04	1.04	1.05	1.06	1.07	1.08
200	0.913	0.967	1.00	1.03	1.05	1.07	1.08	1.10	1.12	1.14	1.16
300	0.881	0.953	0.998	1.03	1.06	1.09	1.11	1.14	1.17	1.19	1.22
400	0.864	0.947	1.00	1.04	1.08	1.11	1.14	1.17	1.21	1.24	1.27
500	0.856	0.945	1.00	1.05	1.09	1.13	1.16	1.20	1.24	1.27	1.32
600	0.852	0.946	1.01	1.06	1.11	1.15	1.18	1.22	1.27	1.30	1.35
700	0.852	0.948	1.02	1.07	1.12	1.16	1.20	1.25	1.30	1.33	1.39
800	0.854	0.952	1.02	1.08	1.13	1.18	1.22	1.27	1.32	1.36	1.42
900	0.857	0.956	1.03	1.09	1.14	1.19	1.24	1.29	1.34	1.38	1.44
1000	0.861	0.961	1.04	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.37	1.41	1.47
1500	0.886	0.989	1.07	1.14	1.20	1.26	1.32	1.38	1.45	1.50	1.58
2000	0.913	1.02	1.10	1.18	1.25	1.31	1.37	1.44	1.52	1.58	1.67
2500	0.939	1.04	1.13	1.21	1.28	1.35	1.42	1.49	1.58	1.65	1.74
3000	0.964	1.07	1.16	1.24	1.32	1.39	1.46	1.54	1.64	1.70	1.80
3500	0.987	1.09	1.18	1.27	1.35	1.42	1.50	1.58	1.68	1.75	1.86
4000	1.01	1.12	1.21	1.29	1.37	1.45	1.53	1.62	1.72	1.80	1.91
4500	1.03	1.14	1.23	1.32	1.40	1.48	1.57	1.66	1.76	1.84	1.95
5000	1.05	1.16	1.25	1.34	1.43	1.51	1.60	1.69	1.80	1.88	2.00
5500	1.06	1.17	1.27	1.36	1.45	1.53	1.62	1.72	1.83	1.92	2.04
6000	1.08	1.19	1.29	1.38	1.47	1.56	1.65	1.75	1.87	1.95	2.07
6500	1.10	1.21	1.31	1.40	1.49	1.58	1.67	1.77	1.90	1.98	2.11
7000	1.11	1.22	1.32	1.42	1.51	1.60	1.70	1.80	1.92	2.01	2.14
7500	1.13	1.24	1.34	1.44	1.53	1.62	1.72	1.82	1.95	2.04	2.18
8000	1.14	1.25	1.36	1.45	1.55	1.64	1.74	1.85	1.98	2.07	2.21
8500	1.15	1.27	1.37	1.47	1.56	1.66	1.76	1.87	2.00	2.09	2.24
9000	1.17	1.28	1.39	1.48	1.58	1.68	1.78	1.89	2.02	2.12	2.26
9500	1.18	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.91	2.05	2.14	2.29
10000	1.19	1.31	1.41	1.51	1.61	1.71	1.82	1.93	2.07	2.17	2.32

доверительной области, построенной на основе статистики, распределенной по закону  $\chi^2_P$ , не равна величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло. Поэтому для удобства сравнения отношения проекции доверительной области, полученной методом  $\chi^2_M$

Таблица 2.13: Коэффициент пересчета  $k_P(\gamma)$  для параметра  $t_{max}$  из табл.2.9-2.12 в отношении проекции доверительной области, полученной методом  $\chi_M^2$  к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло.

$P \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
3	6.08	3.96	3.10	2.61	2.28	2.04	1.85	1.68	1.52	1.43	1.31
6	11.8	6.92	5.08	4.08	3.43	2.96	2.59	2.28	1.98	1.81	1.59
10	17.6	9.81	7.00	5.49	4.53	3.85	3.31	2.86	2.43	2.18	1.87
50	48.9	25.4	17.3	13.1	10.4	8.56	7.14	5.95	4.83	4.19	3.39

к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок в табл.2.13 мы приводим соответствующие значения коэффициента  $k_P(\gamma) = \sqrt{\frac{\Delta_P(\gamma)}{\Delta_I(\gamma)}}$  (такое выражение следует из (2.50) и аналогичного выражения для  $\delta_P(\gamma)$ ), на который необходимо домножить значение  $t_{max}$  из табл.2.9 - 2.12. Величина  $k_P t_{max}$ , как и в описанном выше одномерном случае, в случае многомерной задачи есть отношение проекции доверительной области, полученной на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ , к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло.

В табл.2.14 и на рис.2.9 приведено значение произведения  $k_P t_{max}$  для случая  $P = 10$ . Отметим, что характер числовых значений параметра  $k_P t_{max}$  из табл.2.14 очень близок к значениям  $t_{max}$  из табл.2.8, в которой показано отношение интервала ошибок полученного методом доверительных областей в статистке  $\chi_M^2$  к интервалу ошибок полученному в рамках метода дифференциальных поправок. Сравнение рис.2.8 и рис.2.9 хорошо иллюстрирует сказанное. Таким образом, и для случая многопараметрической задачи характер численного отношения интервала ошибок полученного методом доверительных областей в статистке  $\chi_M^2$  к интервалу ошибок полученному в рамках метода дифференциальных поправок, остается прежним (точные же значения получаются по формулам (2.59) и (2.64), см. также табл.2.9 - 2.13).

Следует помнить, что в случае одномерной задачи вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученной на основе статистики, распределенной по закону  $\chi_P^2$ , и вероятность попадания в доверительный интервал, полученный методом дифференциальных поправок, одинакова. Для случая же многомерной задачи, вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области  $\chi_P^2$  выше в сравнении с доверительным интервалом, полученным методом дифференциальных поправок.

Отметим, что вышеприведенные результаты получены для линейной модели. При этом использование для построения доверительных интервалов статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  основано на том, что минимальное значение невязки распределено по закону  $\chi_{M-P}^2$ . Однако, такое утверждение справедливо лишь для модели с линейной зависимостью от параметров. В случае, когда эта зависимость нелинейная, такое утверждение может быть справедливо лишь в асимптотическом

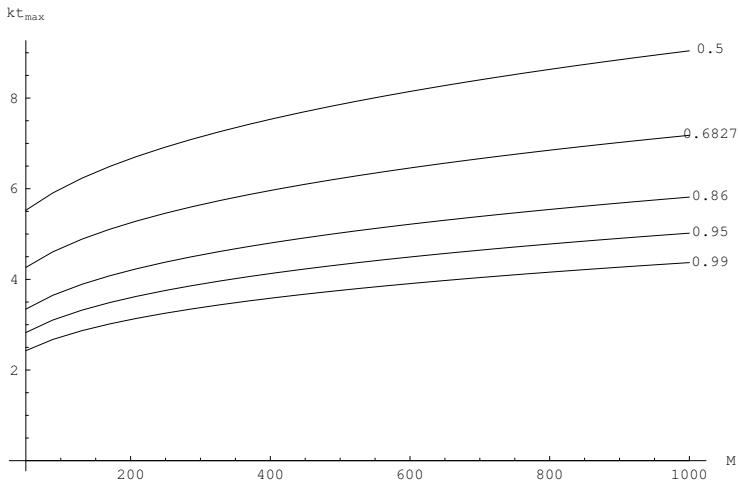


Рис 2.9: Случай многопараметрической задачи. Параметр  $kt_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 10$ . Уровень доверия указан рядом с соответствующей кривой. Отметим, что вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученной в рамках метода  $\chi^2_M$ , выше заданного уровне доверия  $\gamma = 0.6827$ : составляет  $\sim 0.80$ . Тогда как вероятность попадания истинного решения в интервал ошибки полученный в рамках метода дифференциальных поправок, равна заданному уровню доверия  $\gamma = 0.6827$ . Более подробно см. текст статьи.

Таблица 2.14: Параметр  $kpt_{max}$  для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$  и выбранного уровня доверия  $\gamma$  при  $P = 10$  (см. также рис.2.9).

$M \setminus \gamma$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
10	20.4	11.1	7.82	6.07	4.96	4.17	3.56	3.05	2.57	2.29	1.95
20	18.9	10.8	7.81	6.18	5.13	4.37	3.77	3.26	2.77	2.49	2.12
30	18.5	10.8	7.90	6.31	5.27	4.52	3.93	3.41	2.92	2.62	2.24
40	18.5	10.9	8.01	6.44	5.41	4.65	4.06	3.54	3.03	2.73	2.34
50	18.7	11.0	8.13	6.56	5.53	4.77	4.17	3.65	3.13	2.83	2.43
60	18.9	11.2	8.26	6.67	5.63	4.87	4.27	3.74	3.22	2.91	2.50
70	19.2	11.3	8.38	6.78	5.74	4.97	4.36	3.83	3.30	2.98	2.57
80	19.5	11.5	8.50	6.88	5.83	5.06	4.44	3.90	3.37	3.05	2.63
90	19.8	11.6	8.61	6.98	5.92	5.14	4.52	3.97	3.44	3.11	2.68
100	20.0	11.8	8.72	7.08	6.00	5.22	4.59	4.04	3.50	3.17	2.73
200	22.4	13.0	9.63	7.83	6.66	5.82	5.14	4.55	3.96	3.60	3.11
300	24.2	14.0	10.3	8.39	7.14	6.25	5.53	4.90	4.28	3.89	3.38
400	25.6	14.7	10.9	8.84	7.53	6.59	5.84	5.19	4.53	4.13	3.58
500	26.8	15.4	11.4	9.22	7.86	6.88	6.10	5.42	4.74	4.32	3.76
600	27.9	16.0	11.8	9.56	8.15	7.13	6.33	5.63	4.93	4.49	3.91
700	28.9	16.5	12.2	9.86	8.40	7.36	6.53	5.81	5.09	4.64	4.04
800	29.7	17.0	12.5	10.1	8.63	7.56	6.71	5.98	5.24	4.78	4.16
900	30.5	17.4	12.8	10.4	8.85	7.75	6.88	6.13	5.37	4.90	4.27
1000	31.2	17.8	13.1	10.6	9.04	7.92	7.04	6.27	5.49	5.02	4.37
1500	34.2	19.5	14.3	11.6	9.86	8.64	7.68	6.85	6.01	5.49	4.79
2000	36.6	20.8	15.2	12.3	10.5	9.20	8.18	7.30	6.41	5.86	5.11
2500	38.6	21.9	16.0	13.0	11.0	9.67	8.60	7.68	6.74	6.17	5.38
3000	40.2	22.8	16.7	13.5	11.5	10.1	8.97	8.00	7.03	6.44	5.62
3500	41.7	23.7	17.3	14.0	11.9	10.4	9.29	8.29	7.29	6.67	5.82
4000	43.1	24.4	17.8	14.4	12.3	10.8	9.58	8.55	7.52	6.88	6.01
4500	44.3	25.1	18.3	14.8	12.6	11.1	9.84	8.79	7.73	7.08	6.18
5000	45.5	25.7	18.8	15.2	12.9	11.3	10.1	9.00	7.92	7.25	6.33
5500	46.5	26.3	19.2	15.5	13.2	11.6	10.3	9.21	8.10	7.42	6.48
6000	47.5	26.9	19.6	15.8	13.5	11.8	10.5	9.40	8.27	7.57	6.61
6500	48.4	27.4	20.0	16.1	13.7	12.0	10.7	9.57	8.43	7.72	6.74
7000	49.3	27.9	20.3	16.4	14.0	12.3	10.9	9.74	8.58	7.86	6.86
7500	50.1	28.3	20.7	16.7	14.2	12.5	11.1	9.90	8.72	7.99	6.98
8000	50.9	28.8	21.0	17.0	14.4	12.6	11.3	10.1	8.85	8.11	7.09
8500	51.7	29.2	21.3	17.2	14.6	12.8	11.4	10.2	8.98	8.23	7.19
9000	52.4	29.6	21.6	17.4	14.8	13.0	11.6	10.3	9.10	8.34	7.29
9500	53.1	30.0	21.9	17.7	15.0	13.2	11.7	10.5	9.22	8.45	7.38
10000	53.7	30.3	22.1	17.9	15.2	13.3	11.9	10.6	9.34	8.55	7.48

смысле, когда число точек  $M \rightarrow \infty$  [18, 20]. Поэтому для нелинейной модели полученные результаты также могут применяться, но лишь приближенно, в

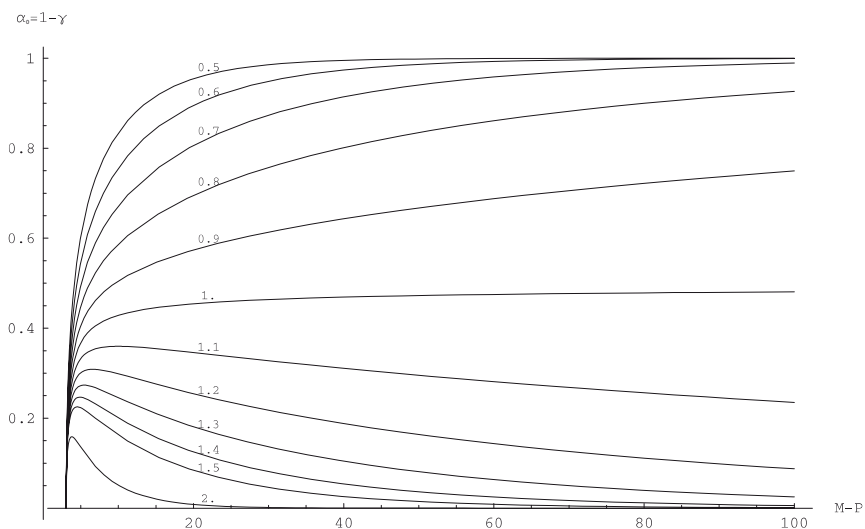


Рис 2.10: Результат решения уравнения  $\frac{\Delta_{M-P}(1-\alpha_0)}{M-P} = q$  относительно уровня значимости  $\alpha_0$  при  $P = 3$ , в зависимости от числа наблюдаемых точек  $M$ , при заданном квантиле  $q$  статистики приведенного  $\hat{\chi}_{M-P}^2$ . Значение квантиля  $q$  указано рядом с соответствующей кривой. Видно, что когда минимальное значение приведенного хи-квадрат, равно 1, соответствующий уровень значимости  $\alpha_0$  стремится к 0.5.

указанном асимптотическом смысле.

*Уровень значимости, соответствующий статистике приведенного хи-квадрат*

Часто об адекватности модели наблюдательным данным судят по близости к единице минимального значения невязки  $\hat{R} \equiv R/(M-P)$ , распределенной по закону приведенного  $\hat{\chi}_{M-P}^2$  (по которому распределена случайная величина  $\frac{\xi}{M-P}$ , если  $\xi \sim \chi_{M-P}^2$ ), где  $P$  - число параметров, по которым проводится минимизация (или по близости значению невязки  $R_{min}$ , распределенной по закону  $\chi_{M-P}^2$ , к значению  $M-P$ ). При этом упускается количественная характеристика адекватности модели, а именно уровень значимости  $\alpha_0 = 1 - \gamma$ , на котором модель может быть отвергнута (напомним, что уровень значимости  $\alpha_0$  - это количество ошибок первого рода, которое мы совершаем, отвергая модель). На рис.2.10 представлено графическое изображение результатов решения уравнения

$$\frac{\Delta_{M-P}(1-\alpha_0)}{M-P} = q$$

относительно уровня значимости  $\alpha_0$ , в зависимости от разности  $M-P$  (где  $M$  - число наблюдаемых точек,  $P$  - число искомых параметров задачи, а  $\Delta_{M-P}(\gamma)$  - функция

зависимости квантиля от уровня доверия  $\gamma = 1 - \alpha_0$ ), при заданном квантиле  $q$  для закона распределения  $\hat{\chi}_{M-P}^2$ . Значение квантиля  $q$  было принято равным 0.5, 0.6, 0.7, 1.0, 1.1, 1.5 и 2.0. Такую зависимость можно записать в явном виде:

$$\alpha_0(M - P) = 1 - \chi_{M-P}^2(q(M - P)).$$

Из рис.2.10 видно, что уровень значимости  $\alpha_0$  достаточно быстро (для  $M \gtrsim 50$ ) начинает стремиться к своему асимптотическому пределу. Так, в случае значения квантиля  $q = 1$ , асимптотический предел уровня значимости  $\alpha_0$  равен  $\sim 50\%$ , то-есть в данном случае, отвергая модель, мы в  $\sim 50\%$  случаев совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно в этом случае, отвергая модель, мы в каждом втором случае неправы, поэтому у нас нет серьезных оснований отвергнуть модель, и таким образом модель может быть принята.

В то же время, для значения квантиля  $q = 1.5$  асимптотический предел уровня значимости  $\alpha_0$  уже близок к  $\sim 0\%$ . В данном случае, отвергая модель, мы в  $\sim 0\%$  случаев совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно в этом случае, отвергая модель, мы почти всегда правы, поэтому у нас нет оснований для принятия модели, поэтому модель должна быть отвергнута.

Таким образом, можно заключить, что если при решении обратной параметрической задачи минимальное приведенное значение хи-квадрат  $\gtrsim 1.5$ , то используемая модель заведомо неадекватна наблюдательным данным. Получаемые в этом случае значения искомых параметров и их доверительных интервалов (ошибок) являются "плохими" и исследователю необходимо позаботиться о построении более совершенной модели.

## Глава 3

# Многоцветные кривые затмения системы HD209458

### 3.1 Система HD209458

Анализ кривой блеска HD209458, полученной на HST в 2000 году, выполнен в работе Брауна и др. [1]. Анализ многоцветных кривых блеска HD 209458, полученных на HST в 2003 году выполнен в работе Кнутсона и др. [2]. В обеих работах были получены радиусы экзопланеты и звезды, наклонение орбиты и коэффициенты потемнения к краю для звезды. Наиболее детальное исследование данных рядов наблюдений с HST выполнил Соуворз [7]. Автор [7] получил значения радиусов экзопланеты и звезды, наклонение орбиты, а также значения коэффициентов потемнения к краю для звезды в различных законах потемнения. Как это часто бывает на практике, очень высокая точность наблюдательных данных позволила автору работы [7], с одной стороны, получить наиболее надежные значения параметров двойной системы, с другой - обусловила некоторые трудности с интерпретацией наблюдений. Во-первых, центральные значения геометрических параметров модели, найденные для разных длин волн  $\lambda$ , показали значительный разброс, в несколько раз превышающий ошибки параметров, найденные методом Монте-Карло. Во-вторых, значения геометрических параметров, найденные из анализа кривых блеска для разных эпох наблюдений, в пределах ошибок оказались не вполне согласующимися между собой. Вряд ли такие трудности интерпретации связаны с особенностями используемой модели, ввиду того, что результаты, полученные в рамках разных моделей (модель двух сферических звезд [29] и модель двух двухосных эллипсоидов [7, 30, 31]) применительно к высокоточным кривым блеска HD209458, хорошо согласуются между собой. Скорее всего, описанные трудности с интерпретацией связаны с тем, что автор [7] для оценки ошибок искомым параметров использовал метод Монте-Карло, который позволяет получить лишь "внутренние" ошибки (основанные на статистике нормального распределения найденных центральных значений параметров при жестком предположении о том, что модель идеально верна), которые могут быть занижены в 3-5 раз [32]. Поэтому имеет смысл дополнительно проанализировать высокоточные кривые блеска HD 209458 из работ [1, 2]. При этом, помимо использования для

оценки ошибок параметров метода дифференциальных поправок, в данной работе применяется метод доверительных областей, который использует статистику "внешнего" распределения наблюдаемых значений кривой блеска, порожденную этими нормально распределенными величинами. С использованием значений ошибок параметров, найденных методом доверительных областей ("внешних" ошибок), удаётся согласовать между собой результаты интерпретации как многоцветных кривых блеска HD 209458, так и кривых блеска, полученных в разные эпохи. Кроме того, подтверждается значимое расхождение между наблюдаемыми и теоретическими зависимостями коэффициентов потемнения диска звезды от длины волны, найденными в работе [7].

## 3.2 Интерпретация затменной системы звезды и экзопланеты

При интерпретации использовалась модель двух сферических звезд на круговой орбите, в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Согласно данным, полученным для экзопланеты CoRoT-1b [3], орбитальный период которой ( $P_{orb} = 1^d.509$ ) вдвое короче, чем в системе HD 209458 ( $P_{orb} = 3^d.52474859$ ), полная наблюдаемая амплитуда эффекта отражения от планеты не превышает  $\sim 0^m.0001$ , амплитуда эффекта эллипсоидальности оптической звезды, по-видимому, в несколько раз меньшей этой величины. Отсюда следует, что в пределах затмения (длительность которого составляет для системы CoRoT-1b  $\sim 0.07$  от орбитального периода) изменения блеска, обусловленные эффектом отражения и эллипсоидальности, не превышают  $10^{-5}$  звездной величины, что пренебрежимо мало. Учитывая неопределенность в форме планеты, связанную с возможным наличием у нее полупрозрачной атмосферы (протяженность которой может достигать  $\sim 5\%$  от ее радиуса [33]), неопределенность связанную с возможным быстрым осевым вращением планеты и ее вращательной деформацией, а также малую степень заполнения планетой своей полости Роша ( $\mu < 0.5$ ), сферическое приближение для планеты можно считать вполне удовлетворительным.

При интерпретации кривой блеска в качестве функций распределения яркости по диску звезды использовались линейный и квадратичный законы потемнения к краю диска (1.2) и (1.3). Яркость в центре диска компонента 1 (звезды) далее будем обозначать как  $I_0^{(1)}$ . Яркость  $I_0^{(2)}$  в центре компонента 2 (планеты) и, соответственно, яркость в любой точке ее диска, предполагается равной нулю. Компонент 2 (планета) в орбитальной фазе  $\theta = \pi$ , затмевает компонент 1 (звезду). Единицей длины в наших моделях является расстояние между центрами звезды и планеты  $a = 1$ , орбита считается круговой. "Третий свет" в модели отсутствует. Радиусы звезды и планеты обозначим как  $r_1, r_2$  соответственно. Искомыми параметрами модели являются: радиусы звезды и планеты  $r_1, r_2$  соответственно, угол наклона орбиты  $i$ , коэффициент потемнения к краю  $x$  или  $x_1$ , а в случае квадратичного закона потемнения к краю - также и коэффициент потемнения  $y_1$ .

В наших моделях мы предполагаем полный блеск  $L^{full}$  известным (а при вычислениях нормированным на единицу). Согласно (1.11) и (1.12) полный блеск



звезды (компонент 1), который совпадает с полным блеском системы вне затмения:

$$L^{full} = 2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho = \pi r_1^2 (X_0^{(1)} + \frac{2}{3} X_1^{(1)}) = \pi r_1^2 I_0^{(1)} (1 - \frac{x_1}{3}), \quad (3.1)$$

в модели с линейным законом потемнения к краю и

$$L^{full} = 2\pi \int_0^{r_1} I^{(1)}(\rho) \rho d\rho = \pi r_1^2 (X_0^{(1)} + \frac{2}{3} X_1^{(1)} + \frac{1}{2} X_2^{(1)}) = \pi r_1^2 I_0^{(1)} (1 - \frac{x_1}{3} - \frac{y_1}{6}). \quad (3.2)$$

в модели с квадратичным законом потемнения к краю.

При этом мы исключаем параметр  $X_1^{(1)}$  в модели с линейным законом потемнения к краю с помощью (3.1):

$$X_1^{(1)} = \frac{3L^{full}}{2\pi r_1^2} - \frac{3}{2} X_0^{(1)}, \quad (3.3)$$

и  $X_2^{(1)}$  в модели с квадратичным законом потемнения к краю с помощью (3.2):

$$X_2^{(1)} = \frac{2L^{full}}{\pi r_1^2} - 2X_0^{(1)} - \frac{4}{3} X_1^{(1)}. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (1.28) и (1.29) соответственно получим выражения для кривых блеска при фиксированном полном блеске системы:

$$\mathbf{L}(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}) = \frac{3L^{full}}{2\pi r_1^2} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + X_0^{(1)} (L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) - \frac{3}{2} L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i)) \quad (3.5)$$

для линейного закона потемнения к краю и

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\theta, r_1, r_2, i, X_0^{(1)}, X_1^{(1)}) &= \frac{2L^{full}}{\pi r_1^2} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) + \\ &+ X_0^{(1)} (L_0^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) - 2L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i)) + \\ &+ X_1^{(1)} (L_1^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i) - \frac{4}{3} L_2^{(1)}(\theta, r_1, r_2, i)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

для квадратичного закона потемнения к краю.

Также можно исключить  $I_0^{(1)}$  в (1.7) и (1.9), выразив его с помощью правых частей (3.1) и (3.2) соответственно. Тогда получим:

$$X_0^{(1)} = \frac{3L^{full}(1-x_1)}{\pi r_1^2(3-x_1)}, \quad (3.7)$$

для линейного закона потемнения к краю и

$$\left. \begin{aligned} X_0^{(1)} &= \frac{6L^{full}(1-x_1-2y_1)}{\pi r_1^2(6-2x_1-y_1)} \\ X_1^{(1)} &= \frac{6L^{full}(x_1+2y_1)}{\pi r_1^2(6-2x_1-y_1)} \end{aligned} \right\}. \quad (3.8)$$

для квадратичного закона потемнения к краю.

Выражениями, обратными (3.7) и (3.8) будут соответственно:

$$x_1 = \frac{6L^{full}}{\pi r_1^2 X_0^{(1)} - 3L^{full}}, \quad (3.9)$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi r_1^2 (12X_0^{(1)} + 11X_1^{(1)}) - 12L^{full}}{3\pi r_1^2 (X_0^{(1)} + X_1^{(1)})} \\ y_1 &= \frac{6L^{full} - \pi r_1^2 (6X_0^{(1)} + 4X_1^{(1)})}{3\pi r_1^2 (X_0^{(1)} + X_1^{(1)})} \end{aligned} \right\}. \quad (3.10)$$

Аналогично тому, как это было сделано в примере с YZCas, при поиске минимальных значений функционала невязки сначала проводится его минимизация по линейным параметрам  $X_0^{(1)}$  и  $X_1^{(1)}$ , поскольку за счет линейности такую минимизацию можно провести аналитически, то есть получить аналитические выражения для величин  $\widetilde{X_0^{(1)}}(r_1, r_2, i)$  и  $\widetilde{X_1^{(1)}}(r_1, r_2, i)$ , которые доставляют минимум функционалу невязки при фиксированных  $r_1, r_2$  и  $i$ , а также для их производных. При минимизации по линейным параметрам не меняется вид статистического распределения минимальных невязок, а лишь уменьшается число степеней свободы этого распределения (см. выше). Дальнейшая минимизация производится уже в отношении нелинейной функции трех переменных  $r_1, r_2, i$ . При этом в методе дифференциальных поправок непосредственно находятся центральные значения  $r_1, r_2, i, X_0^{(1)}$  и  $X_1^{(1)}$  и их ковариации. После чего осуществляется переход к параметрам  $r_1, r_2, i, x_1$  и  $y_1$  по формулам (3.9) и (3.10) и оценки для их дисперсий в методе дифференциальных поправок находятся как для модели, полученной путем соответствующей замены переменных. Следует подчеркнуть, что минимизация по нелинейным параметрам изменяет вид статистического распределения минимальных невязок [12], которое лишь асимптотически (при  $M \rightarrow \infty$ ) стремится к распределению  $\chi_M^2$ . Поскольку в нашем случае число точек на кривых блеска HD 209458 велико ( $M \gtrsim 500$ ), можно считать, что процедура минимизации функционала невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска позволит получить надежные асимптотические доверительные области для искомых параметров модели. Далее по тексту коэффициенты потемнения в модели с линейным законом потемнения обозначаются как  $x$ , без нижнего индекса "1", в модели же с квадратичным законом потемнения линейный и квадратичный коэффициент потемнения по прежнему обозначаются как  $x_1$  и  $y_1$ . Радиус звезды  $r_1$  и радиус планеты  $r_2$  далее в некоторых местах для наглядности обозначаем как  $r_s$  и  $r_p$  соответственно.

### 3.3 Наблюдательный материал

Анализируются высокоточные транзитные кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD209458 из работы [1] и работы [2]. Кривые блеска были получены на космическом телескопе имени Хаббла (HST).

Наблюдаемая кривая блеска, представленная в [1], получена на HST в апреле-мае 2000 года. Спектры получены с использованием спектрометра STIS со спектральной решеткой G750M. Наблюдения проводились в диапазоне 5813–6382Å с разрешением  $R = \lambda/\Delta\lambda = 5440$  (более подробно см. работу [1]). Нормированная кривая блеска транзита экзопланеты по диску звезды представлена на рис.3.2. Кривая блеска включает в себя 556 индивидуальных значений блеска двойной системы. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения для разных точек кривой блеска находится в пределах от  $\sigma_i^{obs} = 1.13 \cdot 10^{-4}$  до  $\sigma_i^{obs} = 2.47 \cdot 10^{-4}$  (в долях внезатменной интенсивности). Величины относительных ошибок (в долях глубины затмения) лежат в пределах от  $\sim 7 \cdot 10^{-3}$  до  $\sim 1.5 \cdot 10^{-2}$ . В работе [2] представлены данные полученные на HST с 3 мая по 6 июля 2003 года. Спектры получены с использованием спектрометра STIS со спектральными решетками G430L (диапазон 2930-5670Å) и G750L (диапазон 5320-10190 Å). Привлечение двух спектральных решеток позволило охватить достаточно широкий волновой диапазон от 2900Å до 10300 Å. Для дальнейшего анализа данный диапазон длин волн авторы работы [2] разделили на десять равных частей, что позволило получить кривые блеска в разных фотометрических полосах. Кривые блеска с центральными длинами волн 3201Å, 3750Å, 4300Å, 4849Å, 5398Å включают в себя по 505 индивидуальных значений блеска. Кривые блеска с центральными длинами волн 5802Å, 6779Å, 7755Å, 8732Å, 9708Å включают в себя по 548 индивидуальных значений блеска. Наблюдаемые транзитные кривые блеска из работы [2] представлены на рис.3.1. Среднеквадратичная ошибка индивидуального измерения колеблется от  $\sigma_i^{obs} = 1.79 \cdot 10^{-4}$  до  $\sigma_i^{obs} = 6.09 \cdot 10^{-4}$  (по отношению к глубине затмения это составляет от  $\sim 10^{-2}$  до  $\sim 3 \cdot 10^{-2}$ ). Более детальная информация о наблюдательных данных и способе их обработки содержится в [2]. Мы предполагаем, что ошибки наблюдений описываются нормальным законом распределения, а систематические ошибки пренебрежимо малы.

### 3.4 Интерпретация кривых блеска HD209458 в рамках линейного закона потемнения

При анализе наблюдаемых кривых блеска искомыми параметрами являлись: радиус экзопланеты  $r_p$ , радиус звезды  $r_s$ , наклонение орбиты  $i$  и линейный коэффициент потемнения к краю для звезды  $x$ . Орбитальный период системы принят равным  $P_{orb} = 3^d.52474859$  [2], отношение масс планеты и звезды  $q = m_p/m_s = 0.00055$  [2], орбита системы предполагалась круговой, радиус относительной орбиты принят равным единице.

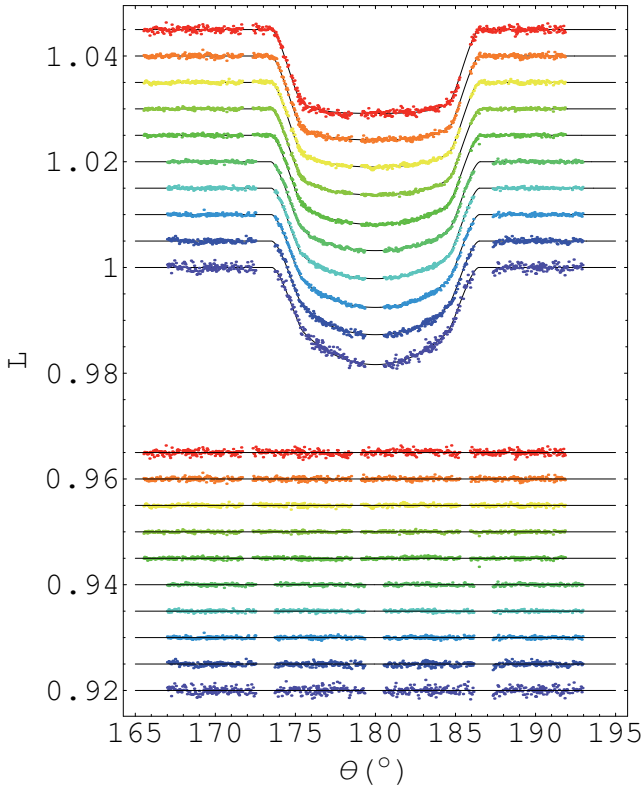


Рис 3.1: Наблюдаемые кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [2], построенные для длин волн (снизу вверх) 3201Å, 3750Å, 4300Å, 4849Å, 5398Å, 5802Å, 6779Å, 7755Å, 8732Å, и 9708Å. Внизу указаны соответствующие распределения невязок. Сплошные линии - теоретические кривые, полученные в рамках модели с нелинейным (квадратичным) потемнением к краю.

*Кривая блеска из работы Брауна и др.[1]*

В табл.3.1 приведены центральные значения найденных параметров и их ошибки, полученные методом дифференциальных поправок (который, как уже отмечалось, эквивалентен методу Монте-Карло) и методом доверительных областей в статистике, распределенной по закону  $\chi^2_P$  ( $P$  - число искомых параметров) и в статистике с

Таблица 3.1: Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска из работы [1] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики распределенной по закону  $\chi^2_P$  (где  $P$  - число искомых параметров), а также в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  (где  $M$  - число точек на кривой блеска).

Параметры	Метод дифференциальных поправок ( $2\sigma$ )	Метод доверительных областей, $\chi^2_P$ (95%)	Метод доверительных областей, $\chi^2_M$ (95%)	Значения параметров из работы Соузворза [7] ( $1\sigma$ )
$r_s(R_\odot)$	0.11469 ± 0.00076	0.1147 ± 0.0012	0.1147 ± 0.00079	0.11482 ± 0.00035
$r_p(R_\odot)$	0.01406 ± 0.00011	0.01406 ± 0.00018	0.01406 ± 0.00012	0.014076 ± 0.000076
$i(^{\circ})$	86.48 ± 0.083	86.48 ± 0.13	86.48 ± 0.13	86.472 ± 0.038
$x$	0.49452 ± 0.0093	0.4944 ± 0.014	0.4945 ± 0.0095	0.494 ± 0.004
$\chi^2_{red}$		1.103		1.1457

законом распределения  $\chi^2_M$  ( $M$  - число наблюдаемых точек). Принят уровень доверия  $\gamma = 95\%$ , что в случае метода дифференциальных поправок соответствует  $2\sigma$ , где  $\sigma$  - стандартное отклонение.

Проверка адекватности модели наблюдательным данным показала, что отношение минимального значения невязки к  $M - P$  (которое распределено по закону приведенного хи-квадрат с  $M - P$  степенями свободы)  $\chi^2_{red} = \chi^2_{M-P} \simeq 1.103$ . Получается, что данная модель может быть отвергнута на уровне значимости  $\alpha \lesssim 0.05889$  (уровень доверия, соответствующий полуинтервалу  $\sim 1.889\sigma$ ). Таким образом, наша модель отвергается на весьма низком уровне значимости ( $\alpha = 6\%$ ) и поэтому является не очень хорошей, хотя и не безнадежно плохой, поскольку в нашем случае имеется возможность оценить доверительные интервалы для искомых параметров в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  на уровне доверия  $\gamma = 0.95$  и дать наиболее консервативные оценки ошибок параметров. Отметим, что для данной наблюдаемой реализации кривой блеска ошибки параметров в рамках метода доверительных областей, полученные с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , оказываются больше, чем полученные с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Вероятность такого события, рассчитанная с помощью формулы (2.63) для закона распределения отношения этих интервалов из (в предположении того, что модель идеально верна), весьма невелика - примерно 4%.

То, что наша модель оказалась не очень хорошей, (отвергая модель мы ошибаемся в менее чем в  $\sim 6\%$  случаев, а в более чем  $\sim 94\%$  случаев, отвергая модель

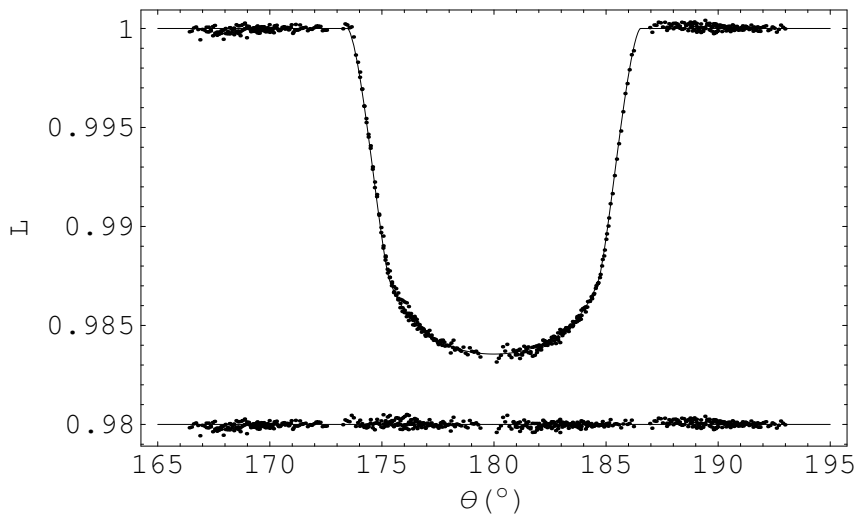


Рис 3.2: Наблюдаемая (точки) и теоретическая (сплошная линия) кривые блеска двойной системы с экзопланетой HD 209458 из работы [1]. Внизу показаны отклонения наблюдаемых значений блеска от теоретической кривой блеска, рассчитанной в рамках модели с нелинейным (квадратичным) законом потемнения к краю.

мы правы) не кажется удивительным. Во-первых, мы используем линейный закон потемнения, который лишь грубо описывает распределение яркости по диску звезды. Кроме того, в нашей модели мы не учитываем мелкой структуры на диске звезды - пятен, факелов, активных областей, размеры которых могут быть сравнимы с размерами затмевающей планеты. Также мы не учитываем возможную физическую микропеременность звезды. Это должно приводить к коротким нерегулярностям в изменении блеска звезды при затмении ее планетой, превышающим статистическую погрешность наблюдений. Такие нерегулярности видны, особенно в нижней части кривой блеска Брауна и др. (см.рис.3.2). Здесь отклонения блеска от средней кривой достигают (а иногда и превышают)  $5 \cdot 10^{-4}$  звездной величины, что в несколько раз больше статистической ошибки наблюдений. Именно то, что наша модель оказалась не очень хорошей, вынуждает нас брать уровень доверия 95%, а не 68%, как это принято делать в случае "хороших" моделей. За критерий "хорошей" модели удобно взять  $\chi_{red}^2 = \widetilde{\chi_{M-P}^2} \leq 1 + 2t$ , где  $t$  - величина порядка  $\frac{P}{M}$  (такое условие равнозначно прохождению модели на уровне доверия  $\gamma \rightarrow 50\%$ , при  $M \rightarrow \infty$ ).

Таблица 3.2: Результаты интерпретации наблюдаемых многоцветных кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ . Уровень доверия принят  $\gamma = 0.95$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s^c$	$\Delta_M(r_s^c)$	$r_p^c$	$\Delta_M(r_p^c)$	$i^c$	$\Delta_M(i^c)$	$x$	$\Delta_M(x^c)$
3201	0.112422	0.00909003	0.0136815	0.00168653	$87^\circ.0418$	$1^\circ.25441$	0.839899	0.112573
3750	0.111096	0.00518492	0.0135058	0.000908670	87.0084	0.685166	0.755113	0.0601379
4300	0.113224	-	0.0138670	-	86.9607	-	0.702653	-
4849	0.113315	0.00215386	0.0138638	0.000353872	86.6501	0.257024	0.617381	0.0267281
5398	0.114474	0.00332352	0.0140443	0.000534038	86.5317	0.387603	0.561101	0.0420762
5802	0.114536	-	0.0141229	-	86.4712	-	0.534661	-
6779	0.115384	0.00210354	0.0141542	0.000327598	86.3841	0.240432	0.436149	0.0332838
7755	0.114060	0.00232615	0.0139412	0.000348055	86.5030	0.266790	0.377645	0.0363709
8732	0.115301	0.00451503	0.0141478	0.000672640	86.3800	0.515776	0.317885	0.0829246
9708	0.114814	-	0.0141637	-	86.3856	-	0.276457	-

В табл.3.1 даны проекции асимптотической доверительной области  $D$  в пространстве четырех искомых параметров на оси параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$  (доверительные интервалы). Вероятность накрытия точного значения параметра указанной проекцией доверительной области  $D$  - доверительным интервалом, превышает 95%. Вероятность накрытия точного решения задачи асимптотической доверительной областью  $D$  гарантируется близкой к заданной вероятности 95% (поскольку число точек на кривой блеска велико:  $M > 500$ ). Вероятность совместного накрытия точного решения всеми проекциями доверительной области  $D$  (соответствующая попаданию точного решения в параллелепипед в пространстве параметров, объемлющий доверительную область  $D$ ) превышает заданную вероятность 95%. Подчеркнем, что все эти утверждения по поводу вероятностей накрытия точного решения доказаны на строгом математическом уровне [18], а также подтверждены результатами конкретного численного моделирования. Таким образом, задавая в качестве ошибок параметров проекции доверительной области  $D$  на оси этих параметров (доверительные интервалы), мы заведомо гарантируем то, что вероятность накрытия точного решения доверительной областью  $D$  равна заданной вероятности 95%. Это и дает нам основания брать в качестве консервативных оценок ошибок искомых параметров проекции доверительной области  $D$  на оси этих параметров (см. табл.3.1), которые можно считать "внешними" ошибками искомых параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ .

Таблица 3.3: Результаты интерпретации наблюдаемых многоцветных кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия принят  $\gamma = 0.95$ . В последнем столбце указано значение приведенного  $\chi^2_{red}$  и соответствующего уровня значимости  $\alpha$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s^c$	$\Delta_P(r_s^c)$	$r_p^c$	$\Delta_P(r_p^c)$	$i^c$	$\Delta_P(i^c)$	$x$	$\Delta_P(x^c)$	$\chi^2_{M-P}/(M-P), (\alpha)$
3201	0.112789	0.00564078	0.0137580	0.00103572	86°.8383	0°.721357	0.833506	0.0703594	1.103 (0.069)
3750	0.111132	0.00318612	0.0135114	0.000556307	86.9630	0.412798	0.754423	0.0371808	1.067 (0.174)
4300	0.113232	0.00197803	0.0138682	0.000343468	86.6565	0.241463	0.702492	0.0233387	1.121 (0.041)
4849	0.113315	0.00162566	0.0138639	0.000267189	86.6468	0.193893	0.617462	0.0201586	1.084 (0.118)
5398	0.114449	0.00171209	0.0140408	0.000274972	86.5227	0.198908	0.561665	0.0217482	1.046 (0.271)
5802	0.114557	0.00138946	0.0141275	0.000228711	86.4703	0.162999	0.533942	0.0205499	1.299 (5.168 · 10 <sup>-6</sup> )
6779	0.115386	0.00125488	0.0141545	0.000195295	86.3806	0.143095	0.436699	0.0198472	1.061 (0.186)
7755	0.114069	0.00158054	0.0139423	0.000236676	86.4989	0.181210	0.378139	0.0247354	1.0739 (0.138)
8732	0.115295	0.00199596	0.0141482	0.000297907	86.3629	0.226904	0.323146	0.0361643	1.021 (0.403)
9708	0.114743	0.00268813	0.0141555	0.000389998	86.4012	0.301402	0.275733	0.0483915	1.122 (0.0334)



Поясним метод построения проекции доверительной области  $D$  на ось параметра. Проекция четырехмерной доверительной области  $D$  на ось одного параметра (например, параметра  $r_p$ ) строится следующим образом. Невязка между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска минимизируется по всем параметрам, кроме одного (например, параметра  $r_p$ ). Затем строится кривая (близкая к параболе) этих минимальных невязок как функция одного параметра (например, параметра  $r_p$ ). Эта кривая пересекается прямой (критическим уровнем), соответствующей заданному уровню значимости  $\alpha$  (в рамках выбранной статистики -  $\chi^2_M$ ,  $\chi^2_P$ ). Значения параметра  $r_p$ , для которых невязка, минимальная по всем остальным параметрам ( $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ ), меньше критического уровня, объединяются в доверительный интервал, который и является проекцией четырехмерной доверительной области  $D$  на ось параметра  $r_p$ . Этот доверительный интервал покрывает точные значения параметра  $r_p$  с вероятностью, большей, чем заданный уровень доверия  $\gamma = 1 - \alpha$ . При этом гарантируется, что точное решение задачи (совокупность точных значений параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ ) покрывается четырехмерной доверительной областью  $D$  с заданной вероятностью  $\gamma = 1 - \alpha$ .

Таблица 3.4: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{\text{est}}(i^c)$	$x$	$2\sigma_{\text{est}}(x^c)$
3201	0.113113	0.00424010	0.0138328	0.000794048	86°.7178	0°.537230	0.828541	0.0505626
3750	0.111175	0.00224100	0.0135199	0.000396390	86.9333	0.292384	0.753992	0.025672
4300	0.113224	0.00127895	0.0138670	0.000220652	86.6507	0.154521	0.702653	0.0153839
4849	0.113302	0.00107659	0.0138618	0.000176852	86.6440	0.1282050	0.617614	0.0134061
5398	0.114456	0.00107583	0.0140421	0.000172042	86.5177	0.1239884	0.561705	0.0140619
5802	0.114535	0.00093831	0.0141229	0.000154114	86.4712	0.1097888	0.534661	0.0144226
6779	0.115394	0.00076714	0.0141560	0.000118926	86.3777	0.0869080	0.436943	0.0125312
7755	0.114035	0.00098878	0.0139372	0.000146933	86.4998	0.1119664	0.379030	0.0157685
8732	0.115326	0.00120960	0.0141535	0.000179209	86.3547	0.1355734	0.323969	0.0223688
9708	0.114814	0.00185497	0.0141637	0.000267488	86.3856	0.2046620	0.276457	0.0342494

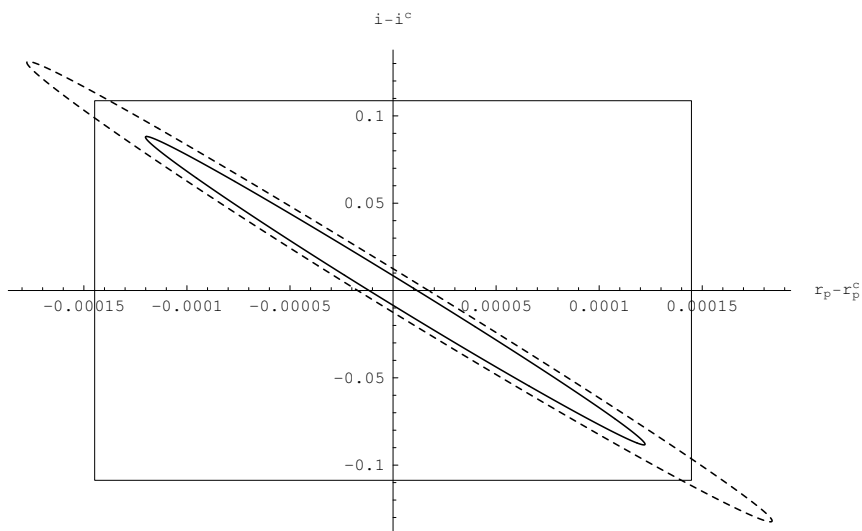


Рис 3.3: Проекция доверительной области  $D$  (на уровне доверия 95%) на плоскость  $r_p, i$ , полученная при интерпретации кривой блеска из работы [1] в рамках модели с линейным законом потемнения. Малый "эллипс" (сплошная линия) - доверительная область получена с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ , большой "эллипс" (пунктирная линия) - с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Прямоугольник соответствует проекции доверительной области на уровне  $2\sigma_{est}$ , полученной методом дифференциальных поправок.

На рис.3.3 приведена проекция доверительной области  $D$  на плоскость параметров  $r_p, i$ . Данная проекция характеризует форму доверительной области  $D$ . Изобразить же всю многомерную область  $D$  на бумаге не представляется возможным. Прямоугольник изображает проекцию области, определяемой ошибками параметров (на уровне  $2\sigma$ ), найденными методом дифференциальных поправок. Ввиду того, что модель с линейным коэффициентом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1] отвергается на весьма низком уровне значимости (см. выше), различие между габаритами проекций доверительных областей, построенных на основе метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей в данном случае не очень велико (см., однако рис.3.4 и рис.3.5).

Вероятность накрытия точного значения для каждого из параметров интервалом  $\pm 2\sigma$  соответствует заданной вероятности  $\gamma = 95\%$ . Однако вероятность совместного накрытия точного решения всеми интервалами, полученными в методе дифференциальных поправок, меньше (примерно  $\sim 1.5$  раза) заданной вероятности  $\gamma = 95\%$ . Таким образом, указывая "внутренние" ошибки параметров, полученные методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло в предположении того, что модель идеально верна, мы заведомо занижаем вероятность одновременного

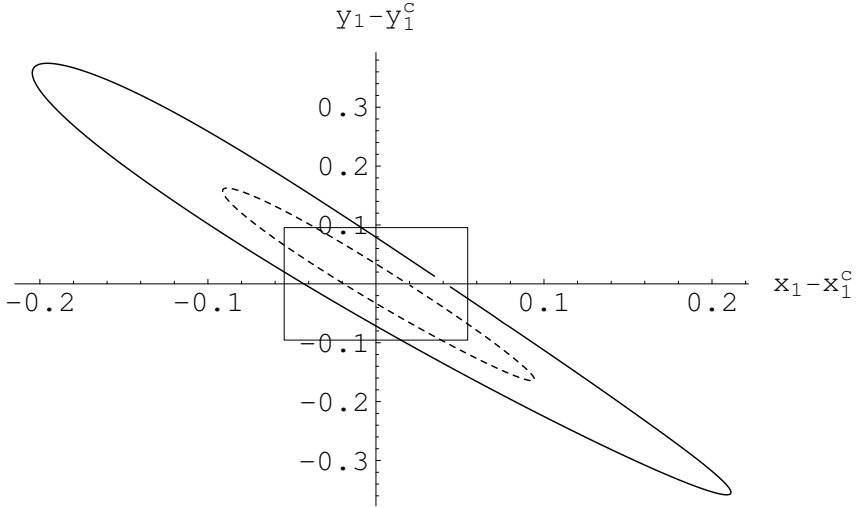


Рис 3.4: Проекция доверительной области  $D$  (на уровне доверия 95%) на плоскость  $x_1, y_1$  в модели с квадратичным законом потемнения. Малый "эллипс" - область получена с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , большой "эллипс" - с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Прямоугольник соответствует проекции доверительной области на уровне  $2\sigma_{est}$ , полученной методом дифференциальных поправок. Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска из работы [1].

попадания всех искомым параметров в соответствующую четырехмерную область ошибок (см., также рис.3.4 и рис.3.5). Этим и объясняется то, что результаты интерпретации наблюдательных данных, полученных в разные эпохи, в пределах "внутренних" ошибок часто не согласуются между собой, а сами значения ошибок параметров, найденные методом дифференциальных поправок (или методом Монте-Карло) часто оказываются нереалистично малыми.

*Многоцветные кривые блеска из работы Кнутсона и др. [2]*

Кривые блеска системы HD 209458 полученные в работе [2] для  $\lambda = 3201\text{\AA}$ ,  $3750\text{\AA}$ ,  $4300\text{\AA}$ ,  $4849\text{\AA}$ ,  $5398\text{\AA}$ ,  $5802\text{\AA}$ ,  $6779\text{\AA}$ ,  $7755\text{\AA}$ ,  $8732\text{\AA}$ ,  $9708\text{\AA}$  приведены на рис.3.1 (длина волны  $\lambda$  возрастает снизу вверх). В табл. 3.2, 3.3, 3.4 приведены результаты интерпретации этих кривых блеска с использованием разных методов оценки ошибок искомым параметров: методом доверительных областей в статистиках  $\chi^2_M$  (табл.3.2, здесь прочерки соответствуют вырождению "точной" доверительной области в пустое множество ввиду того, что модель отвергается на выбранном уровне значимости  $\alpha = 5\%$ ), в статистике с законом распределения  $\chi^2_P$  (табл.3.3),

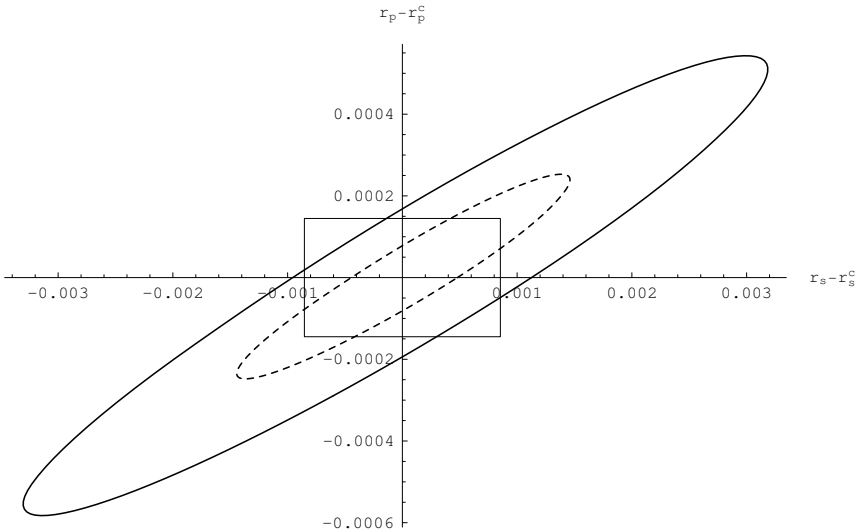


Рис 3.5: Проекция доверительной области  $D$  (на уровне доверия 95%) на плоскость  $r_p, r_s$  в модели с квадратичным законом потемнения. Малый "эллипс" - область получена с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , большой "эллипс" - с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Прямоугольник соответствует проекции доверительной области на уровне  $2\sigma_{est}$ , полученной методом дифференциальных поправок. Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска из работы [1].

а также методом дифференциальных поправок, табл.3.4 (в статистике нормального распределения найденных центральных значений искомым параметров и в гипотезе о том, что модель идеально верна). Особенно велико значение приведенного  $\chi^2_{red}$  для кривой блеска  $\lambda = 5802\text{\AA}$  ( $\chi^2_{red} = 1.299$ ; соответствующий уровень значимости, по которому отвергается модель, очень мал:  $\alpha = 5.168 \cdot 10^{-6}$ ). По-видимому, в эту кривую блеска вкрались какие-то дополнительные источники ошибок. Для остальных длин волн значения  $\chi^2_{red}$  лежат в разумных пределах:  $\chi^2_{red} = 1.021 - 1.122$ .

Проверка адекватности модели наблюдательным данным показала, что минимизированное значение невязки в рамках статистики приведенного хи-квадрат превышает единицу (см. табл. 3.3).

Использование статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  при интерпретации кривых блеска  $\lambda = 3201\text{\AA}, 3750\text{\AA}, 4849\text{\AA}, 5398\text{\AA}, 6779\text{\AA}, 7755\text{\AA}, 8732\text{\AA}$ , показало, что наша модель не отвергается по уровню значимости  $\alpha = 5\%$  (и может быть принята). Во всех этих случаях могут быть построены "точные" (то есть накрывающие точное решение с заданной вероятностью  $\gamma = 95\%$ ) доверительные области  $D$  и получены проекции области  $D$  на оси параметров  $r_p, r_s, i, x$  (доверительные интервалы), которые можно считать наиболее консервативными

Таблица 3.5: Различия между значениями геометрических параметров полученных по кривым блеска разных эпох. "Внутренние" и "внешние" ошибки.

Максимальное различие параметров	Различия в центральных значениях параметров	Метод дифференциальных поправок ( $2\sigma$ )	Метод доверительных областей, $\chi^2_P$ (95%)	Метод доверительных областей, $\chi^2_M$ (95%)
$\frac{ r_p^{(2000)} - r_p^{(2003)} }{2}$	0.000048	0.00012	0.00018	0.00033
$\frac{ r_s^{(2000)} - r_s^{(2003)} }{2}$	0.00034	0.00077	0.0012	0.0021
$\frac{ i^{(2000)} - i^{(2003)} }{2}$	0°.051	0°.087	0°.13	0°.24

"внешними" ошибками параметров (см. табл.3.2). Для трех кривых блеска ( $\lambda = 4300\text{\AA}$ ,  $5802\text{\AA}$ ,  $9708\text{\AA}$ ) наша модель отвергается по уровню значимости  $\alpha < 5\%$  и, таким образом, является "плохой". Для этих кривых блеска удается получить лишь "внешние" ошибки параметров (доверительные интервалы) в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , соответствующие асимптотической доверительной области  $D$ , а также "внутренние" ошибки параметров в рамках статистики нормального распределения найденных центральных значений параметров, с применением метода дифференциальных поправок. Хотя, как отмечалось в работе [12], не следует забывать и о том, что на практике мы имеем дело не с полной случайной наблюдаемой функцией (кривой блеска), а лишь с ее конкретной реализацией. Поэтому не исключена и возможность того, что возникшие трудности с интерпретацией (модель отвергается на весьма низком уровне значимости, и доверительная область  $D$  в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  вырождается в пустое множество) связаны не с недостатком модели, а со случайным уклонением наблюдаемой функции. Для другой реализации наблюдаемой функции, например, кривой блеска, полученной в другую эпоху, применяемая модель может оказаться вполне удовлетворительной и будет отвергаться на достаточно высоком уровне значимости, что позволит построить доверительную область  $D$  в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Это и дает нам основания строить асимптотическую доверительную область в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  (которая, по определению, никогда не вырождается в пустое множество) даже в том случае, когда модель отвергается на весьма низком уровне значимости и является "плохой".

Интересно сравнить значения геометрических параметров системы HD209458, полученные в разные эпохи. В табл.3.5 приведены значения параметров и их ошибок для кривой блеска  $\lambda(5813 - 6382\text{\AA})$ , полученной Брауном и др. [1] в апреле-мае 2000 года и для кривой блеска с центральной длиной волны  $\lambda 6779\text{\AA}$  ( $\Delta\lambda = 6279 - 7279\text{\AA}$ ) полученной Кнутсоном и др. [2] в мае-июле 2003 года. Полуинтервалы максимальных различий в центральных значениях параметров составляют:  $\frac{|r_p^{(2000)} - r_p^{(2003)}|}{2} = 0.00004775$ ,  $\frac{|r_s^{(2000)} - r_s^{(2003)}|}{2} = 0.00034050$ ,  $\frac{|i^{(2000)} - i^{(2003)}|}{2} = 0°.0515$ . Эти различия не выходят за пределы "внутренних" ошибок  $2\sigma$  и тем более, не выходят за пределы доверительных интервалов  $\Delta_M$  и  $\Delta_P$  (см. табл.3.5).

Интересно также сравнить значения геометрических параметров ( $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ) для

Таблица 3.6: Интервалы разброса найденных центральных значений искомым геометрических параметров полученных по десяти кривым блеска для разных длин волн (в скобках указано отношение полуинтервала ( $max-min$ ))/2 к соответствующим средним значениям интервалов ошибки из табл.3.2, 3.3, 3.4).

Параметры	Максимальный разброс центральных значений (min-max)	Метод дифференциальных поправок ( $2\sigma$ )	Метод доверительных областей, $\chi^2_P$ (95%)	Метод доверительных областей, $\chi^2_M$ (95%)
$r_s$	0.111096 - 0.115394	0.112373 - 0.115507 (1.37)	0.112076-0.115984 (1.10)	0.109620 - 0.117820 (0.52)
$r_p$	0.0135058 - 0.0141542	0.0137074 - 0.0142326 (1.23)	0.013667 - 0.014293 (1.04)	0.013220 - 0.014600 (0.47)
$k = r_p/r_s$	0.121609 - 0.123362	0.121876 - 0.123264 (1.26)	0.12157-0.12357 (0.88)	0.12077 - 0.124219 (0.47)
$i(^{\circ})$	86.3547 - 87.0400	86.36 - 86.74 (1.82)	86.31 - 86.77 (1.49)	86.13 - 87.15 (0.67)

Таблица 3.7: Коэффициенты потемнения к краю звездного диска полученные в предположение линейного закона потемнения. Центральные значения и интервалы ошибки получены в рамках метода дифференциальных поправок(ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ ) и метода доверительных областей с использованием статистик с законами распределения  $\chi^2_P$  и  $\chi^2_M$  (уровень доверия принят  $\gamma = 0.95$ ).

$\lambda(\text{Å})$	$x$	$2\sigma_{\text{est}}(x^c)$	$x$	$\Delta_P(x^c)$	$x$	$\Delta_M(x^c)$
3201	0.828541	0.0505626	0.833506	0.0703594	0.839899	0.112573
3750	0.753992	0.0256720	0.754423	0.0371808	0.755113	0.0601379
4300	0.702653	0.0153839	0.702492	0.0233387	-	-
4849	0.617614	0.0134061	0.617462	0.0201586	0.617381	0.0267281
5398	0.561705	0.0140619	0.561665	0.0217482	0.561101	0.0420762
5802	0.534661	0.0144226	0.533942	0.0205499	-	-
6779	0.436943	0.0125312	0.436699	0.0198472	0.436149	0.0332838
7755	0.379030	0.0157685	0.378139	0.0247354	0.377645	0.0363709
8732	0.323969	0.0223688	0.323146	0.0361643	0.317885	0.0829246
9708	0.276457	0.0340324	0.275733	0.0483915	-	-

кривых блеска HD 209458, полученных Кнутсоном и др.[2] в одну эпоху (в мае-июле 2003 года), но для разных длин волн. Результаты этого сравнения приведены в табл.3.6. Видно, что в пределах "внутренних" ошибок  $2\sigma$  значения геометрических параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ , полученные для разных  $\lambda$ , не вполне согласуются между собой. В то же время при использовании "внешних" ошибок  $\Delta_P$ , и особенно,  $\Delta_M$  эти значения геометрических параметров хорошо согласуются.

Таблица 3.8: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках линейного закона потемнения к краю при фиксированных значениях параметров  $\bar{r}_p$ ,  $\bar{r}_s$  и  $\bar{i}$ , средних для всех длин волн. Ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.95$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$x$	$\Delta_P(x)$	$x$	$\Delta_M(x)$	$\chi^2_{red}$
3201	0.805194	0.0196023	-	-	1.127
3750	0.732868	0.0117864	-	-	1.208
4300	0.697317	0.00718819	-	-	1.190
4849	0.608848	0.00705112	0.608828	0.00992982	1.103
5398	0.552146	0.00778080	0.552016	0.0194529	1.068
5802	0.552724	0.00662294	-	-	1.420
6779	0.445318	0.00680517	-	-	1.214
7755	0.395653	0.00922067	-	-	1.354
8732	0.352846	0.0125393	0.352893	0.00567959	1.110
9708	0.329928	0.0181280	-	-	1.158

### Зависимость линейного коэффициента потемнения от длины волны

Поскольку простая модель с линейным законом потемнения в применении к кривым блеска Брауна и др. [1] и Кнутсона и др. [2] не является безнадежно "плохой" и отвергается на уровне значимости  $\alpha$  в несколько процентов (за исключением кривой блеска  $\lambda = 5802\text{\AA}$ ), имеет смысл проанализировать зависимость коэффициента потемнения  $x$  в предположении линейного закона потемнения от длины волны  $\lambda$  и сравнить эту зависимость с соответствующей теоретической зависимостью, следующей из модели тонких звездных атмосфер.

В табл.3.7 приведены найденные нами значения линейного коэффициента потемнения  $x$  и их ошибок ( $2\sigma$ ,  $\Delta_P$ ,  $\Delta_M$ ) как функции  $\lambda$ . Минимизация функционала невязки для каждого значения  $\lambda$  проводилась по четырем параметрам  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ . Прочерки соответствуют случаям, когда модель отвергается на уровне значимости  $\alpha < 5\%$ . Как видно из табл.3.7, в случае наиболее консервативной оценки "внешних" ошибок параметра  $x$  (метод, основанный на статистике с законом распределения  $\chi^2_M$ ), коэффициент потемнения  $x$  определяется с относительной погрешностью в 8-13% для синего конца спектра ( $\lambda = 3201 - 3750\text{\AA}$ ), с погрешностью в 4-8% для видимого диапазона ( $\lambda = 4849 - 6779$ ) и с погрешностью в 8-26% для красного конца спектра ( $\lambda = 7755 - 8732\text{\AA}$ ).

Графически зависимость линейного коэффициента  $x$  (в предположении линейного закона потемнения к краю) от длины волны  $\lambda$  представлена на рис.3.6 и рис.3.7. В качестве теоретической зависимости изменения коэффициента  $x$  с длиной волны использованы результаты работы Кларэ [13] для фотометрических систем ugriz и UBVRJ. Использование разных фотометрических систем позволяет выяснить, насколько зависимость  $x(\lambda)$  обусловлена выбором соответствующей фотометрической системы (необходимость такой проверки подчеркивалась в работе

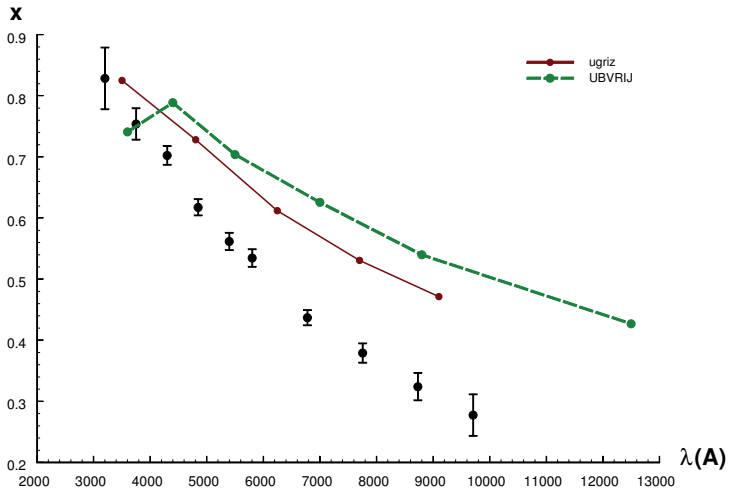


Рис 3.6: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 209458 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJI приведены из работы [13].



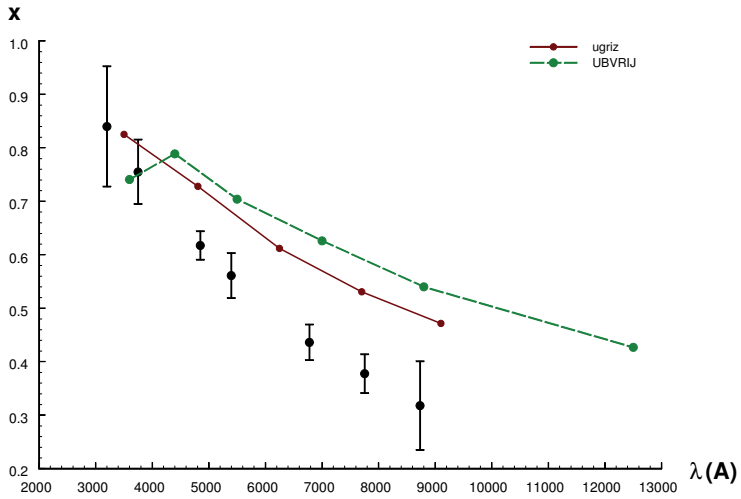


Рис 3.7: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 209458 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень доверия составляет  $\gamma = 0.95$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJ приведены из работы [13].

[7]).

На рис.3.6 представлены найденные нами центральные значения линейного коэффициента потемнения  $x$  и их "внутренние" ошибки на уровне  $2\sigma$ , полученные методом дифференциальных поправок. В целом наши результаты хорошо согласуются с результатами, полученными в работе Соузорза [7]. Из рис.3.6 видно, что значения линейного коэффициента потемнения  $x$ , полученные из анализа наблюдаемых кривых блеска, расходятся с теоретическими значениями.

На рис.3.7 приведены центральные значения линейного коэффициента потемнения  $x$  и наиболее консервативные оценки "внешних" ошибок, полученные методом доверительных областей опирающемся на статистику с законом распределения  $\chi^2_M$ . Напомним, что принятый нами уровень доверия  $\gamma = 95\%$ . Здесь же даны соответствующие теоретические зависимости  $x(\lambda)$  из работы Кларэ [13]. Несмотря на увеличение интервала ошибок коэффициента потемнения  $x$  в 2-4 раза по сравнению с "внутренними" ошибками на уровне  $2\sigma$ , расхождение между наблюдаемыми и теоретическими значениями коэффициентов потемнения  $x(\lambda)$  остается значимым. Наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  систематически меньше теоретических, и это различие нарастает, по мере увеличения длины волны. Этот результат имеет большое значение для уточнения современных моделей тонких звездных атмосфер.

В табл.3.2, табл.3.3 и табл.3.4 приведены значения  $x(\lambda)$  и их ошибки, полученные путем минимизации функционала невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска по четырем параметрам  $r_p, r_s, i, x$ . В этом случае каждому значению  $x$  для данной  $\lambda$  соответствует свой набор геометрических параметров  $r_p, r_s, i$ . В то же время, ясно, что значение параметра  $i$  не должно зависеть от длины волны  $\lambda$ . Значение радиуса планеты, из-за наличия у нее атмосферы, может зависеть от  $\lambda$ , но этот эффект мал и выявляется лишь для очень высокочастотных кривых затмения (см., например, [39]). Поэтому мы выполнили определение коэффициентов потемнения к краю  $x(\lambda)$  при фиксированных геометрических параметрах  $r_p, r_s, i$ , общих для всех  $\lambda$ . В качестве таковых были взяты средние арифметические значения параметров  $r_p, r_s, i$  из всех значений, найденных для разных  $\lambda$ :  $\bar{r}_p = 0.0139657$ ,  $\bar{r}_s = 0.113937$ ,  $\bar{i} = 86^\circ.55$ .

Значения коэффициентов потемнения  $x(\lambda)$  и их ошибок, найденные путем минимизации функционала невязки при фиксированных значениях геометрических параметров  $\bar{r}_p, \bar{r}_s, \bar{i}$ , представлены в табл.3.8. Можно полагать, что эти значения  $x(\lambda)$  наиболее надежно отражают зависимость коэффициента потемнения  $x$  от длины волны  $\lambda$ , которая приведена на рис.3.8. Здесь в качестве "внешних" ошибок приведены значения  $\Delta_p$ , полученные с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . В рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  модель в большинстве случаев отвергается по уровню значимости  $\alpha < 5\%$  ввиду того, что в данном случае используются более жесткие модельные предположения об одинаковом значении геометрических параметров для всех длин волн. Лишь для трех длин волн ( $\lambda$  4849Å, 5398Å, 8732Å) в этом случае модель может быть принята на уровне значимости  $\alpha = 5\%$ . В табл.3.8 приведены соответствующие центральные значения  $x(\lambda)$  и наиболее консервативные оценки "внешних" ошибок, полученные в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ .

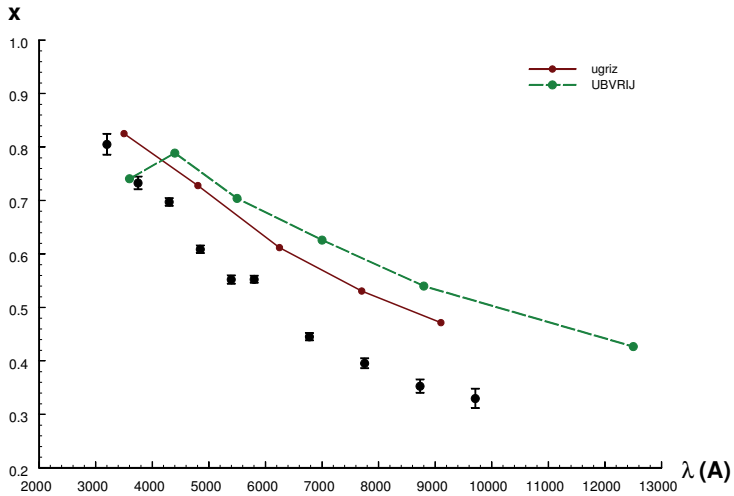


Рис 3.8: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 209458 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны при фиксированных значениях  $\bar{r}_p = 0.0139657$ ,  $\bar{r}_s = 0.113937$ ,  $\bar{i} = 86^\circ.555243$ , средних для всех длин волн. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Уровень доверия составляет  $\gamma = 0.95$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работы [13].

### 3.5 Интерпретация кривых блеска HD209458 в рамках квадратичного закона потемнения

В работе [7] из анализа многоцветных кривых блеска HD 209458 [2] были определены также коэффициенты квадратичного потемнения к краю. Автор подчеркивает, что в случае наиболее точной кривой блеска, полученной Брауном и др. [1], модель с линейным законом потемнения может быть отвергнута. При этом автор работы [7] отмечает, что в данном случае модель с линейным законом потемнения "может быть отвергнута на высоком уровне значимости (более, чем 99.99%)". Этот вывод автора [7] качественно согласуется нашими результатами (см. выше), однако в данном случае имеются количественные расхождения. Обычно под уровнем значимости  $\alpha$  статистического критерия (см., например, [18]) понимается количество ошибок 1-го рода, которые мы совершаем при применении этого критерия. Под ошибкой 1-го рода понимается ситуация, когда модель верна, но она отбрасывается по статистическому критерию. Если, согласно [7], модель может быть отвергнута на уровне значимости более, чем 99.99%, то это означает, что, отбрасывая модель, мы в 9999 случаях из 10000 совершаем ошибку 1-го рода, то есть отбрасываем верную модель. Лишь в одном случае из 10000, отбрасывая модель, мы правы, (то есть отбрасываем неверную модель). Поэтому в данном случае у нас нет оснований отбросить модель, и модель может быть принята. Приводя цифру 99.99%, автор [7], по-видимому, имел в виду не уровень значимости  $\alpha$ , а уровень доверия  $\gamma = 1 - \alpha$ . С учетом этой путаницы, можно сказать, что в работе [7] модель с линейным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1] отвергается на очень низком уровне значимости  $\alpha < 0.01\%$ . Отметим, что минимальное значение невязки в рамках приведенного хи-квадрат в случае линейного закона потемнения (и кривой блеска Брауна и др. [1]), согласно [7], составляет  $\chi_{red}^2 = 1.1457$ , что соответствует уровню значимости, при котором модель может быть отвергнута,  $\alpha = 1\%$  (а не  $\alpha < 0.01\%$ , как это утверждается в работе [7]). Согласно результатам нашей интерпретации, модель с линейным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна [1] отвергается на низком уровне значимости ( $\alpha \sim 6\%$ ), что согласуется с величиной минимального приведенного хи-квадрат  $\chi_{red}^2 = \chi_{M-P}^2 / (M - P) \simeq 1.103$ . Поэтому, как отмечалось выше, модель с линейным законом потемнения является не очень хорошей, но и не безнадежно "плохой", поскольку в данном случае имеется возможность оценить "консервативные" ошибки параметров на уровне доверия  $\gamma = 95\%$ .

Мы выполнили интерпретацию наиболее точной кривой блеска Брауна и др. [1] с использованием квадратичного закона потемнения. Минимизация функционала невязки проводилась по пяти параметрам:  $r_p, r_s, i, x_1, y_1$ . Здесь  $x_1, y_1$  - коэффициенты в законе потемнения:

$$I(\mu) = I_0 [1 - x_1(1 - \mu) - y_1(1 - \mu)^2],$$

где  $\mu = \cos \omega$  ( $\omega$  - угол между нормалью к поверхности звезды и лучем зрения). Результаты представлены в табл.3.9. Здесь даны центральные значения параметров  $r_p, r_s, i, x_1, y_1$  и их ошибки  $\Delta$ , полученные методом дифференциальных поправок и методом доверительных областей на уровне доверия  $\gamma = 95\%$ . Там же дано значение

приведенного хи-квадрат  $\chi_{red}^2 = 1.01340$ , которое оказалось существенно меньше приведенного хи-квадрат для случая линейного потемнения к краю ( $\chi_{red}^2 = 1.103$ ). В рамках квадратичного закона потемнения наша модель не отвергается на уровне значимости  $\alpha > 46\%$ , поэтому имеется возможность оценить "внешние" ошибки параметров на уровне доверия  $\sim 95\%$  как в статистике с законом распределения  $\chi_P^2$ , так и в статистике с законом распределения  $\chi_M^2$ . Таким образом, модель с квадратичным законом потемнения в применении к высокоточной кривой блеска Брауна и др. [1], является "хорошей" (отвергая модель, мы более чем в 46% случаев совершаем ошибку первого рода, то есть отвергаем правильную модель). Это дает нам основания предпочесть нелинейный (квадратичный) закон потемнения по сравнению с линейным (см. выше). Более того, модель с нелинейным (квадратичным) законом потемнения, оказалась настолько хороша, что в данном случае можно оценить консервативные "внешние" ошибки параметров  $x_1, y_1$  на уровне доверия  $\gamma = 1 - \alpha = 68\%$ . Эти ошибки приведены в табл.3.10.

Таблица 3.9: Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска из работы [1] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках нелинейного (квадратичного) закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики, распределенной по закону  $\chi_P^2$  (где  $P$  - число искомых параметров), а также в рамках статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  (где  $M$  - число точек на кривой блеска). В нижней строке дано значение приведенного  $\chi_{red}^2$ .

Параметры	Метод дифференциальных поправок ( $2\sigma$ )	Метод доверительных областей, $\chi_P^2$ (95%)	Метод доверительных областей, $\chi_M^2$ (95%)
$r_1^c$	0.11384	0.1138	0.1138
$\Delta(r_1^c)$	0.00085	0.0015	0.0032
$r_2^c$	0.01377	0.01377	0.01375
$\Delta(r_2^c)$	0.00014	0.00025	0.00056
$i^c(^{\circ})$	86.68	86.68	86.72
$\Delta(i^c)^{(\circ)}$	0.11	0.19	0.43
$x_1$	0.295	0.296	0.30
$\Delta(x_1^c)$	0.055	0.093	0.21
$y_1$	0.344	0.34	0.35
$\Delta(y_1^c)$	0.096	0.16	0.37
$\chi_{red}^2$	1.01340		

Консервативная оценка "внешних" ошибок параметров  $x_1, y_1$  на уровне доверия

95% показывает, что найденные значения  $x_1, y_1$  находятся на пределе обнаружения (см. табл.3.9 и табл.3.13). Если ограничиться лишь "внутренними" ошибками параметров  $x_1, y_1$  (см. табл.3.9) или консервативными "внешними" ошибками на уровне доверия 68% (см. табл.3.10), то значения коэффициентов потемнения к краю  $x_1, y_1$  можно считать реальными.

Таблица 3.10: Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска из работы [1] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках нелинейного (квадратичного) закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей с использованием статистики, распределенной по закону  $\chi^2_P$  (где  $P$  - число искомым параметров), а также в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  (где  $M$  - число точек на кривой блеска). Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.68$ .

Параметры	Метод дифференциальных поправок ( $\sigma$ )	Метод доверительных областей, $\chi^2_P$ (68%)	Метод доверительных областей, $\chi^2_M$ (68%)
$r_1^c$	0.11384	0.1138	0.1138
$\Delta(r_1^c)$	0.00043	0.0010	0.0016
$r_2^c$	0.013765	0.01377	0.01377
$\Delta(r_2^c)$	0.000072	0.00018	0.00027
$i^c(^{\circ})$	86.68	86.68	86.68
$\Delta(i^c)^{\circ}$	0.054	0.14	0.20
$x_1$	0.295	0.295	0.296
$\Delta(x_1^c)$	0.027	0.066	0.099
$y_1$	0.344	0.34	0.34
$\Delta(y_1^c)$	0.048	0.12	0.18

Мы также применили модель с квадратичным законом потемнения к интерпретации многоцветных кривых блеска Кнутсона и др. [2]. В табл.5.12, табл.3.12, табл.3.13 приведены соответствующие результаты интерпретации. Как следует из табл.5.12 величина  $\chi^2_{red}$  в данном случае в среднем меньше, чем  $\chi^2_{red}$  для модели с линейным законом потемнения (см. табл.3.3). На рис.3.9, рис.3.10, рис.3.11 и рис.3.12 приведены значения коэффициентов  $x_1, y_1$  как функции длины волны  $\lambda$ . Там же приведены теоретические значения  $x_1, y_1$ , взятые из работы Кларе [13]. Видно, что нелинейный коэффициент  $y_1$  для HD 209458 согласуется с теоретической зависимостью в пределах ошибок. Однако наблюдаемые значения линейного коэффициента  $x_1$  для квадратичного закона потемнения к краю значимо расходятся с теоретическими значениями (как и для случая линейного закона потемнения к краю.) На рис.3.4, рис.3.5 приведены проекции доверительной области

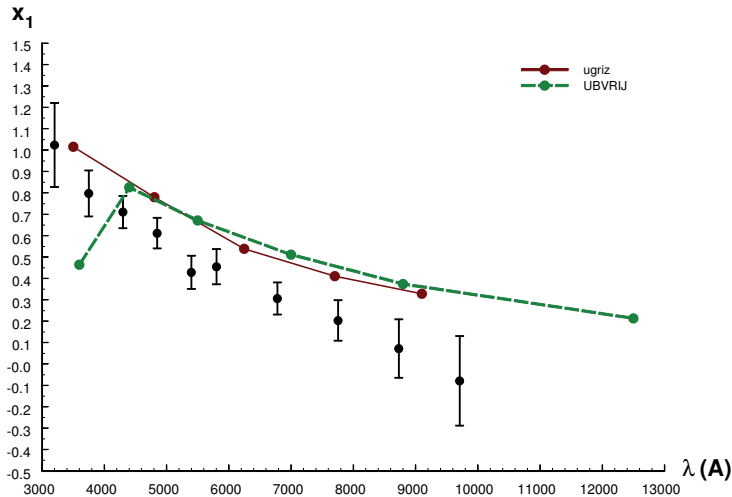


Рис 3.9: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 209458 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz (сплошная линия) и UBVRJ (пунктирная линия) приведены из работы [13].

$D$  на плоскости параметров  $x_1$ ,  $y_1$  и  $r_s$ ,  $r_p$ , соответственно. Прямоугольники здесь изображают проекции области, определяемой ошибками параметров (на уровне  $2\sigma$ ), найденными методом дифференциальных поправок.

### 3.6 Применение приближенного метода оценки "внешних" ошибок параметров

Оценки "внешних" ошибок параметров системы HD209458, приведенные выше, проводились нами путем прямого перебора по параметрам и построения соответствующей поверхности функционала невязки в многомерном пространстве параметров. Процедура перебора по параметрам - весьма трудоемкая, хотя в нашей простой модели (две сферические звезды на круговой орбите) она решается

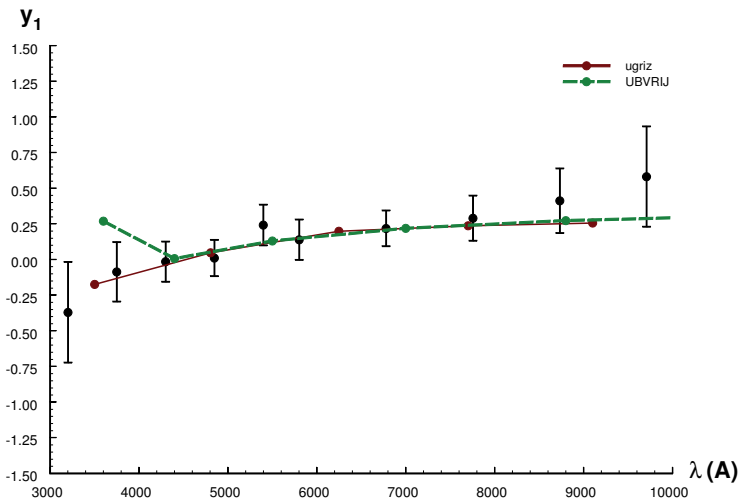


Рис 3.10: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 209458 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz (сплошная линия) и UBVRIJ (пунктирная линия) приведены из работы [13].



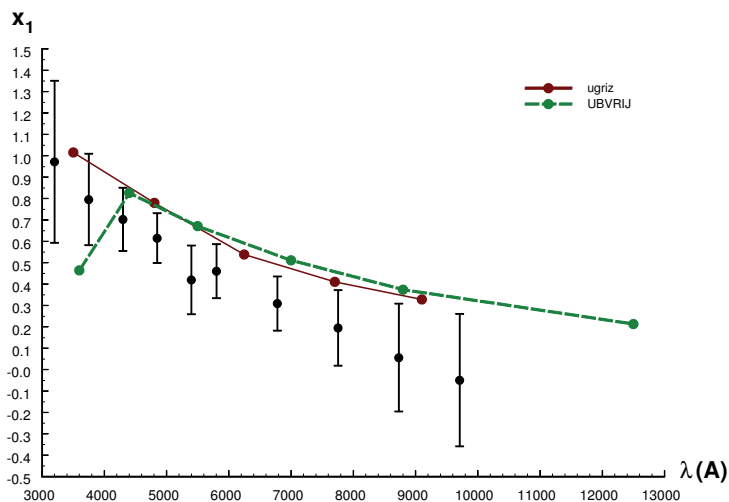


Рис 3.11: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 209458 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия составляет  $\gamma = 0.95$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz (сплошная линия) и UBVRJI (пунктирная линия) приведены из работы [13].

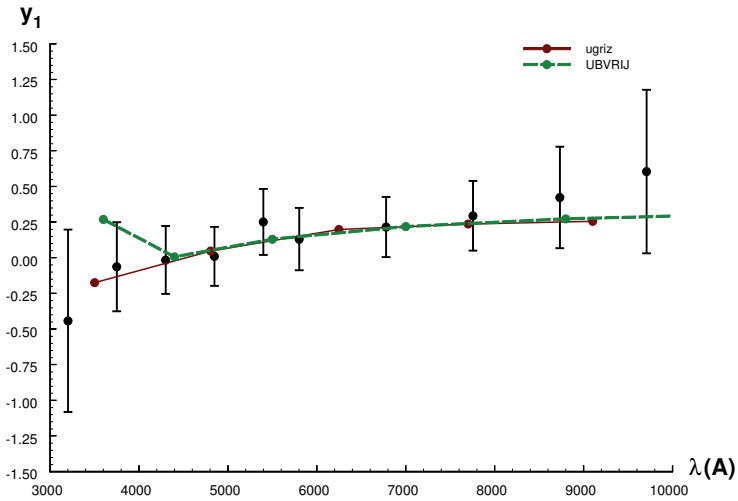


Рис 3.12: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 209458 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициентов потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска из работы [2]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия составляет  $\gamma = 0.95$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz (сплошная линия) и UBVRIJ (пунктирная линия) приведены из работы [13].

сравнительно легко. Однако для других, более сложных моделей процедура перебора по параметрам может оказаться весьма обременительной. Поэтому в разделе 2.6 предложен приближенный метод оценки "внешних" ошибок параметров модели, который легко реализуется на практике. Даны зависимости, с помощью которых можно вычислить коэффициент перехода ( $t_{max}$  для одномерной задачи или  $k_{p_{t_{max}}}$  для многомерной задачи) от "внутренних" ошибок параметра, найденных методом Монте-Карло или методом дифференциальных поправок, к "внешним" ошибкам, получаемым методом доверительных областей в рамках статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ . Поэтому, вычислив "внутренние" ошибки  $\delta_1(\gamma)$  параметров задачи и убедившись, что используемая модель адекватна наблюдениям (для чего достаточно вычислить лишь минимальное значение функционала невязки и посчитать значение приведенного  $\chi_{red}^2$ ), можно путем домножения "внутренних" ошибок на коэффициент  $k_{p_{t_{max}}}$  найти наиболее консервативные оценки "внешних" ошибок параметров в рамках статистики, распределенной по закону  $\chi_M^2$ .

В табл.3.14 приведены значения  $\frac{\Delta_M(\gamma;\xi)}{\delta_1(\gamma)}$ , вычисленные на основе полученных в данной работе интервалов ошибок (содержащихся в табл.3.2 и табл.3.4). Здесь  $\delta_1 = 2\sigma_{est}$  - ошибка, полученная методом дифференциальных поправок. Отметим, что для разных реализаций кривой блеска истинное отношение  $\frac{\Delta_M(\gamma;\xi)}{2\sigma_{est}}$  может значительно меняться (см. функцию плотности распределения в работе). Однако данная теоретическая функция обладает экстремумом, и в предлагаемом методе работы речь идет о наиболее вероятном значении отношения  $\frac{\Delta_M(\gamma;\xi)}{2\sigma_{est}}$ . Для реализации кривой блеска из работы [2] наблюдаемое отношение  $\frac{\Delta_M(\gamma;\xi)}{2\sigma_{est}}$  составляет  $\sim 2.6$ . Опираясь на предложенный метод расчета, можно заключить, что наиболее вероятное теоретическое значение, отношения  $\frac{\Delta_M(\gamma;\xi)}{2\sigma_{est}}$  составляет  $\sim 4$ . Данное значение превышает в  $\sim 1.5$  раза определенное из наблюдений расхождение между ошибкой полученной в рамках метода дифференциальных поправок и метода доверительных областей (с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ ). Тем не менее использование наиболее вероятного теоретического отношения интервалов  $t_{max1} = \frac{\delta_M(\gamma;\xi)}{\delta_1(\gamma)}$  позволит избежать рассогласования значений параметров полученных по разным наблюдаемым реализациям исследуемого процесса, к которому зачастую приводит метод дифференциальных поправок (или метод Монте-Карло), и позволит указать доверительные интервалы искомого параметров, заведомо отвечающие выбранному уровню доверия, а также позволит значительно сэкономить время расчетов самих интервалов ошибок.

### 3.7 Выводы относительно системы HD209458

В работе определены параметры системы HD209458 из анализа высокоточных спутниковых кривых блеска при затмении звезды экзопланетой. Определены радиусы экзопланеты и звезды, наклонение орбиты, а также значения линейных и нелинейных коэффициентов потемнения к краю звезды. При этом выполнен всесторонний анализ ошибок найденных параметров, рассмотрены как "внутренние", так и "внешние" ошибки параметров, которые получаются в 2 - 4 раза больше "внутренних". С учетом "внешних" ошибок, нам удалось согласовать значения геометрических параметров, соответствующих наблюдениям, полученным в разных

Таблица 3.11: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведённого хи-квадрат и соответствующего уровня значимости  $\alpha$ .

$\lambda(\text{Å})$	$r_p^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_p^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_p^c)$	$i^c$	$2\sigma_{\text{est}}(i^c)$	$x_1$	$2\sigma_{\text{est}}(x_1^c)$	$y_1$	$2\sigma_{\text{est}}(y_1^c)$	$\chi^2_{\text{red}}$	$\alpha$
3201	0.1128	0.003574	0.01407	0.0007801	86 <sup>o</sup> .59	0 <sup>o</sup> .46	1.024	0.1965	-0.3706	0.3530	1.062	0.205
3750	0.1113	0.002223	0.01360	0.0004571	86.88	0.31	0.7978	0.1074	-0.08720	0.2086	1.068	0.181
4300	0.1133	0.001312	0.01388	0.0002658	86.64	0.18	0.7105	0.07557	-0.01514	0.1408	1.123	0.0409
4849	0.1133	0.001122	0.01385	0.0002147	86.65	0.15	0.6119	0.07144	0.01035	0.1274	1.086	0.118
5398	0.1138	0.001222	0.01381	0.0002279	86.67	0.16	0.4286	0.07723	0.2419	0.1426	1.023	0.410
5802	0.1142	0.001034	0.01400	0.0001969	86.55	0.14	0.4551	0.08225	0.1389	0.1418	1.293	8.55 · 10 <sup>-6</sup>
6779	0.1149	0.0008532	0.01399	0.0001520	86.49	0.11	0.3066	0.07529	0.2183	0.1250	1.042	0.292
7755	0.1134	0.001130	0.01374	0.0001909	86.64	0.15	0.2035	0.09479	0.2899	0.1580	1.048	0.257
8732	0.1144	0.001424	0.01388	0.0002411	86.54	0.19	0.07225	0.1369	0.4119	0.2265	0.9966	0.574
9708	0.1136	0.002296	0.01380	0.0003744	86.64	0.30	-0.07901	0.2096	0.5815	0.3519	1.100	0.0702

Таблица 3.12: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Уровень доверия 95%.

$\lambda$	$r_p^c$	$\Delta_p(r_1)$	$r_p^c$	$\Delta_p(r_2)$	$i^c$	$\Delta_p(i)$	$x_1$	$\Delta_p(x_1)$	$y_1$	$\Delta_p(y_1)$
3201	0.1128	0.0053	0.01439	0.00140	86 <sup>o</sup> .53	0 <sup>o</sup> .81	1.04	0.30	-0.52	0.67
3750	0.1112	0.0034	0.01359	0.00068	86.93	0.49	0.80	0.16	-0.07	0.32
4300	0.1133	0.0023	0.01388	0.00051	86.66	0.34	0.72	0.13	-0.02	0.26
4849	0.1133	0.0018	0.01385	0.00035	86.66	0.25	0.62	0.12	0.01	0.21
5398	0.1138	0.0021	0.01380	0.00039	86.69	0.29	0.43	0.13	0.25	0.24
5802	0.1142	0.0016	0.01402	0.00031	86.55	0.22	0.46	0.13	0.13	0.22
6779	0.1149	0.0014	0.01399	0.00026	86.49	0.19	0.31	0.13	0.22	0.21
7755	0.1134	0.0018	0.01374	0.00030	86.64	0.24	0.21	0.15	0.29	0.25
8732	0.1144	0.0023	0.01388	0.00039	86.56	0.31	0.07	0.22	0.42	0.37
9708	0.1133	0.0038	0.01374	0.00063	86.73	0.53	-0.08	0.34	0.60	0.57

Таблица 3.13: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска из работы [2] двойной системы с экзопланетой HD209458 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень доверия 95%.

$\lambda$	$r_p^c$	$\Delta_M(r_1)$	$r_p^c$	$\Delta_M(r_2)$	$i^c$	$\Delta_M(i)$	$x_1$	$\Delta_M(x_1)$	$y_1$	$\Delta_M(y_1)$
3201	0.1174	0.0141	0.01428	0.00249	86 <sup>o</sup> .96	1 <sup>o</sup> .61	0.91	0.43	-0.19	1.40
3750	0.1109	0.0051	0.01356	0.00110	87.01	0.81	0.81	0.26	-0.08	0.50
4300										
4849	0.1133	0.0022	0.01385	0.00043	86.67	0.30	0.62	0.14	0.01	0.25
5398	0.1136	0.0044	0.01373	0.00085	86.79	0.65	0.42	0.26	0.28	0.52
5802										
6779	0.1148	0.0027	0.01399	0.00050	86.51	0.36	0.32	0.24	0.21	0.40
7755	0.1133	0.0033	0.01373	0.00056	86.67	0.44	0.21	0.28	0.29	0.46
8732	0.1136	0.0056	0.01380	0.00105	86.72	0.86	0.09	0.58	0.44	0.95
9708	0.1134	0.0031	0.01376	0.00051	86.70	0.42	-0.08	0.28	0.60	0.47

длинах волн.

Относительный радиус экзопланеты в системе HD 209458 (в долях радиуса относительной орбиты системы) равен  $r_p = 0.01386$  (приведено среднее значение по данным табл. 3.12). Оптическая звезда в системе HD209458 - карлик спектрального класса G0 V. Абсолютный радиус этой звезды  $R_s = 7.98 \cdot 10^{10}$  см (согласно работе [2] в предположении значений массы звезды и планеты  $M_s = 1.101M_{\odot}$ ,  $M_p = 0.64M_{Jup}$  соответственно). Следовательно абсолютный радиус планеты равен  $R_p = 9.70 \cdot 10^9$

Таблица 3.14: Значение наблюдаемого отношения величины интервала ошибок  $\Delta_M$  полученного в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  ( $\gamma = 0.95$ ) к величине ошибки  $2\sigma_{est}$  полученной, методом дифференциальных поправок. Представлено наблюдаемое отношение  $\frac{\Delta_M(\gamma, \xi)}{2\sigma_{est}}$  для параметров  $k = r_s/r_p$ ,  $i$ ,  $r_p$  и  $r_s$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$k$	$r_s$	$r_p$	$i(^{\circ})$
3201	2.13	2.14	2.12	2.13
3750	2.30	2.31	2.29	2.30
4300	-	-	-	-
4849	2.00	2.00	2.00	2.00
5398	3.10	3.09	3.10	3.10
5802	-	-	-	-
6779	2.75	2.74	2.75	2.75
7755	2.36	2.35	2.37	2.36
8732	3.74	3.73	3.75	3.74
9708	-	-	-	-
Среднее значение	2.63	2.62	2.63	2.63

см. Масса планеты равна [34]  $M_p = 1.215 \cdot 10^{30}$  г. Средняя плотность планеты равна  $\rho_p = 0.318 \text{ г/см}^3$ . Используя формулу, связывающую ускорение силы тяжести на поверхности планеты  $g_p$  с полуамплитудой кривой лучевых скоростей звезды  $K_s$  [7],

$$g_p = \frac{2\pi}{P_{orb}} \frac{(1 - e^2)^{1/2} K_s}{r_p^2 \sin i}$$

Таблица 3.15: Зависимость среднего относительного радиуса полости Роша от отношения масс компонентов, вычисленного по формулам (3.11), (3.12).

$q$	0.00955	0.001	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	1	2
$R_p/a$ (3.11)	0.039785	0.048366	0.10201	0.16833	0.20677	0.28103	0.32079	0.37892	0.44000
$R_p/a$ (3.12)	0.037727	0.045985	0.098776	0.16673	0.20684	0.28215	0.31895	0.36510	0.40185

и подставляя  $e = 0$ ,  $K_s = 85.1 \pm 1.0 \text{ м/с}$  [35],  $P_{orb} = 3^d.52474859$ ,  $i = 86^{\circ}.65 \pm$  (см. табл. 3.12) находим ускорение силы тяжести  $g_p = 8.61 \text{ м/с}^2$ , что близко к ускорению силы тяжести на поверхности Земли.

Отношение масс планеты и звезды  $q = m_p/m_s = 0.00055$ , относительный радиус планеты  $r_p = \frac{R_p}{a} = 0.01386$ . Для проверки нашего предположения о сферичности планеты, вычислим средний относительный радиус полости Роша для планеты, используя аппроксимационные формулы [38]:

$$R_R = 0.49a \frac{q^{2/3}}{0.62q^{2/3} + \ln(1 + q^{1/3})}, \quad (3.11)$$

$$R_R = 0.46a \left( \frac{M_2}{M_1 + M_2} \right)^{1/3}. \quad (3.12)$$

В табл.3.15 приведены значения среднего относительного радиуса полости Роша  $R_R/a$  ( $a$  – радиус относительной орбиты системы) для различных значений отношений масс планеты и звезды  $q = m_p/m_s$ , в диапазоне  $q = 0.00055 \div 2$ . Видно, что величины  $R_R/a$ , посчитанные по формулам (3.11) и (3.12), хорошо согласуются между собой, что говорит о надежности оценки среднего относительного радиуса полости Роша для планеты. При радиусе планеты  $r_p = 0.01386$  и радиусе полости Роша для нее  $R_R/a = 0.039785$  степень заполнения планетой своей полости Роша составляет  $\mu = 0.35$ , что значительно меньше чем 0.5. Поэтому наше предположение о сферичности планеты вполне обосновано (если пренебречь некоторой сплюснутостью планеты, обусловленной ее осевым вращением). То же самое можно сказать и об оптической звезде.

Очень ценная информация получается о потемнении к краю диска звезды. Из анализа высокоточных спутниковых многоцветных кривых блеска наблюдений Кнутсона и др. [2] удается получить зависимость от длины волны как линейного коэффициента потемнения  $x(\lambda)$ , так и нелинейных коэффициентов потемнения  $x_1(\lambda)$ ,  $y_1(\lambda)$  в предположении квадратичного закона. Нами подтверждено обнаруженное в работе Соуворза [7] различие между наблюдаемой и теоретическими зависимостями линейного коэффициента потемнения  $x$  от длины волны. Новым результатом является то, что даже с использованием наиболее консервативных оценок "внешних" ошибок определения коэффициента потемнения  $x$  (в рамках статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ ), остается значимое расхождение между наблюдаемой и теоретической зависимостями  $x(\lambda)$ . Наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  оказываются систематически меньше теоретических, причем это различие увеличивается с увеличением длины волны, так что в области  $\lambda \approx 9000\text{\AA}$  наблюдаемый линейный коэффициент потемнения примерно в полтора раза меньше теоретического. Таким образом, диск звезды в красном диапазоне спектра оказывается значительно более однородным, чем это предсказывает теория тонких звездных атмосфер. Зависимость от  $\lambda$  коэффициента потемнения  $x_1$  в предположении квадратичного закона также значимо отличается от соответствующей теоретической зависимости: наблюдаемые значения  $x_1$  систематически меньше теоретических, причем это различие нарастает по мере увеличения длины волны  $\lambda$ . Важно подчеркнуть, что это различие сохраняется даже при использовании консервативных "внешних" ошибок определения значений  $x_1$  в рамках статистики с законом распределения  $\chi_p^2$ . Зависимость от  $\lambda$  коэффициента потемнения  $y_1$  в предположении квадратичного закона в пределах ошибок определения согласуется с соответствующей теоретической зависимостью.

До последнего времени проверка моделей звездных атмосфер проводилась в основном путем сравнения наблюдаемого и теоретического спектров излучения от всего диска звезды. Высокоточные спутниковые многоцветные наблюдения покрытий звезд экзопланетами дают новую и уникальную возможность независимой проверки моделей звездных атмосфер по угловому распределению излучения для разных  $\lambda$ , выходящего из атмосферы звезды. Важным преимуществом затмений звезд экзопланетами для определения коэффициентов потемнения к краю звезд является пренебрежимая малость эффектов отражения и эллипсоидальности, а также кольцевой характер затмения при относительно малом радиусе затмевающей

планеты. Поэтому, несмотря на то, что относительная точность кривых затмения в данном случае не экстремально высока ( в случае спутниковых наблюдений составляет  $\sim 1 - 2\%$  по отношению к глубине затмения), перечисленные благоприятные обстоятельства позволяют уверенно находить коэффициенты потемнения как в линейном, так и в нелинейном законе потемнения. Поэтому эти исследования важны не только для определения фундаментальных характеристик экзопланет, но и для дальнейшего развития теории звездных атмосфер.

Отметим, что впервые на возможность обнаружения затмения звезд экзопланетами указал А.В. Тутуков [36, 37].

# Глава 4

## Анализ кривых блеска систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b

### 4.1 Используемая модель

Использовалась описанная в разделе 3.2 модель двух сферических звезд на круговой орбите, в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Относительный радиус полости Роша  $R_R/a$  для планет представлен в табл.4.1. Значения относительного радиуса полости Роша планет получены по аппроксимационной формуле Эгглетона (3.11) в которой  $q$  являлось отношением массы планеты  $m_p$  к массе звезды  $m_s$ . За значения массы звезд  $m_s$  и планет  $m_p$  в системах Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b приняты значения масс приведенные в работах [9, 10, 11] соответственно.

Таблица 4.1: Масса планеты, звезды и средний относительный радиус полости Роша планеты в двойных системах Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b.

Система	$m_p(M_{Jup})$	$m_s(M_{\odot})$	$R_R/a$
Kepler-5b	2.114	1.374	0.052
Kepler-6b	0.669	1.209	0.037
Kepler-7b	0.433	1.347	0.031

Степень заполнения планетами своих полостей Роша составляет значительно меньше чем 0.5 (см. табл.4.1). Поэтому наше предположение о сферичности планеты вполне обосновано (если пренебречь некоторой сплюснутостью планеты, обусловленной ее осевым вращением). То же самое можно сказать и об оптической звезде.

При расчете кривой блеска в качестве функций распределения яркости по диску звезды использовался линейный закон потемнения к краю диска с линейным коэффициентом потемнения к краю  $x$  и квадратичный закон потемнения к краю диска, отличающийся от линейного дополнительным слагаемым, содержащим квадратичный коэффициент потемнения к краю  $y$ .



## 4.2 Наблюдательный материал

Анализировались высокоточные транзитные кривые блеска двойной системы с экзопланетой Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b из работ [9], [10], [11]. Кривые блеска были получены на космической обсерватории Kepler с 1 мая по 14 июня 2009 года.

Звездные системы Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b являются объектами  $\sim 13^m$  звездной величины. Кривые блеска получены в фотометрическом фильтре  $g$  фотометрической системы Ганна (ugriz). Центральная длина волны полосы пропускания  $\lambda_0 = 6550\text{\AA}$  и полуширина полосы пропускания  $\Delta\lambda = 900\text{\AA}$ . Транзитные кривые блеска каждой из исследуемой системы включает в себя около 2100 индивидуальных значений блеска системы, большинство которых приходится на внезатенную часть кривой блеска.

Точность транзитных кривых блеска двойных систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в интенсивностях составила  $\sigma = 1.3759 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma = 1.2874 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma = 1.0248 \cdot 10^{-4}$  соответственно. Относительная ошибка (по отношению к глубине затмения) исследуемых в работе транзитных кривых блеска составляет  $\sim 1\%$ . Наблюдаемые транзитные кривые блеска систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b представлены на рис.4.1, рис.4.2, рис.4.3 соответственно.

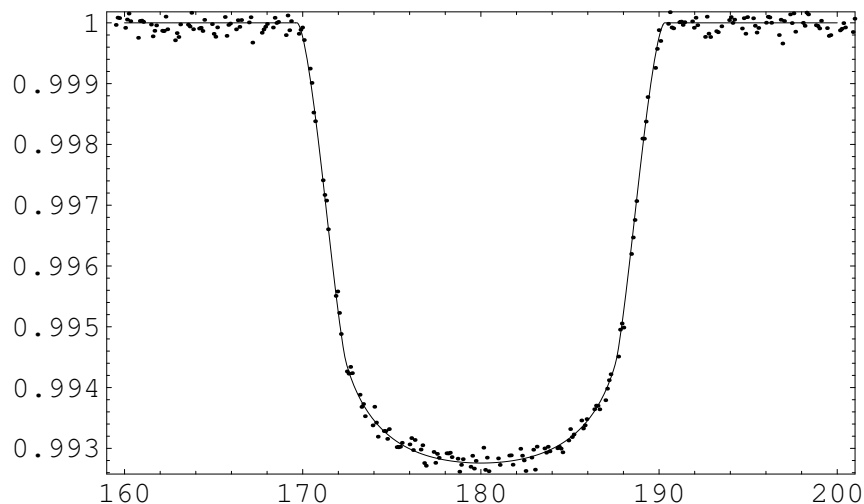


Рис 4.1: Наблюдаемая кривая блеска двойной системы с экзопланетой Kepler-5b полученная в фильтре  $g$  из работы [9]. Сплошная линия - оптимальная теоретическая кривая, полученная в предположении квадратичного закона потемнения диска звезды к краю.

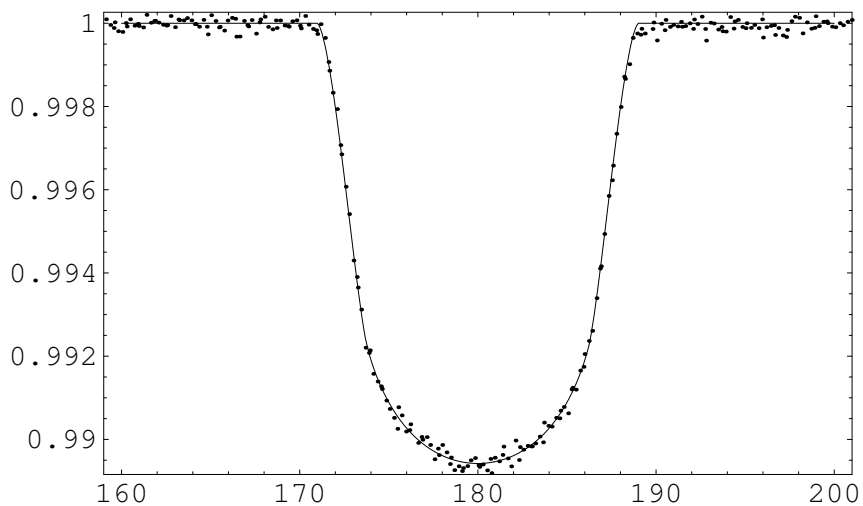


Рис 4.2: Наблюдаемая кривая блеска двойной системы с экзопланетой Kerler-6b полученная в фильтре  $\gamma$  из работы [10]. Сплошная линия - оптимальная теоретическая кривая, полученная в предположении квадратичного закона потемнения диска звезды к краю.

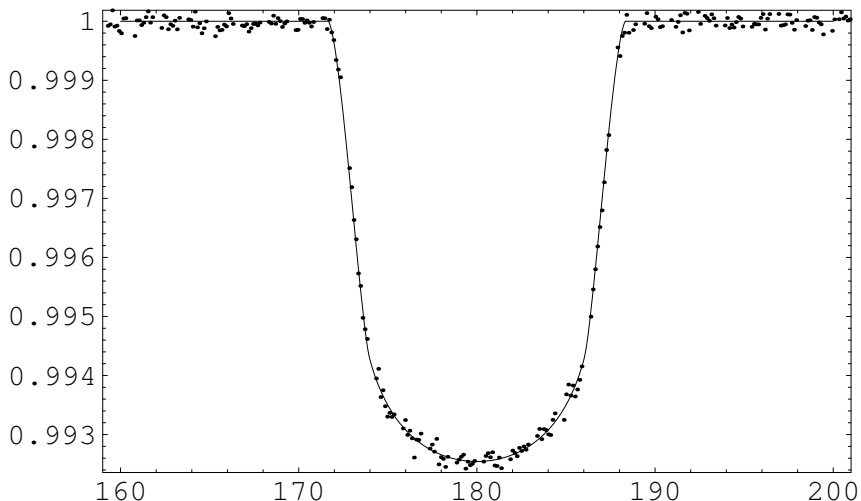


Рис 4.3: Наблюдаемая кривая блеска двойной системы с экзопланетой Kepler-7b полученная в фильтре  $g$  из работы [11]. Сплошная линия - оптимальная теоретическая кривая, полученная в предположении квадратичного закона потемнения диска звезды к краю.

Обратим внимание на тот факт, что для исследования потемнения диска звезды к краю высокоточные транзитные кривые являются намного более информативными в сравнение с кривыми блеска классических затменных двойных систем, поскольку в транзитных кривых блеска эффекты отражения и эллипсоидальности пренебрежимо малы, а изменения блеска, обусловленные потемнением к краю диска затмеваемой звезды, составляют несколько десятков процентов (при относительной точности кривых затмения около 1%).

### **Интерпретация кривых блеска Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в рамках линейного закона потемнения**

Часто в астрофизических исследованиях возникает необходимость в учете потемнения звездного диска к краю. Коэффициенты потемнения к краю в предположении различных законов потемнения уже неоднократно вычислены в рамках различных теоретических одномерных моделей тонких звездных атмосфер (например ATLAS и PHOENIX). Двойные системы с экзопланетами предоставляют уникальную возможность – проверить адекватность теоретических моделей и получить эмпирические значения коэффициентов потемнения звездного диска к краю непосредственно из наблюдательного материала. Ниже приводится сравнение теоретических коэффициентов потемнения к краю из таблиц Кларе [13] и эмпирических значений коэффициентов потемнения, полученных непосредственно

из высокоточных кривых блеска систем с экзопланетами Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b.

Результаты интерпретации транзитной кривой блеска двойной системы Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в предположении линейного закона потемнения к краю представлены в табл.4.2. Минимизация невязки проводилась одновременно по всем искомым параметрам радиусу звезды  $r_s$ , радиусу планеты  $r_p$ , наклонению орбиты  $i$  и линейному коэффициенту потемнения звездного диска к краю  $x$  (1.2).

Таблица 4.2: Результаты интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетой Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ .

Система	$r_s$	$2\sigma_{r_s}$	$r_p$	$2\sigma_{r_p}$	$i$	$2\sigma_i$	$x$	$2\sigma_x$	$\chi_{red}^2$	$\alpha$
Kepler-5b	0.2111	0.0042	0.01777	0.00044	81.59	0.38	0.482	0.032	1.0537	0.0485
Kepler-6b	0.1792	0.0028	0.01803	0.00038	82.98	0.26	0.635	0.026	1.0736	0.0114
Kepler-7b	0.1724	0.0030	0.01469	0.00032	83.11	0.26	0.538	0.026	1.0555	0.0436

В табл.4.3 приведены теоретические значения коэффициентов потемнения к краю из работы Кларе [13] в фильтре  $g$  (фотометрическая системы Ганна  $ugriz$ ), соответствующему волновому диапазону  $\lambda = 6550 \pm 900\text{\AA}$ . Как видно из табл.4.2 и табл.4.3, для звезд систем Kepler-5b, Kepler-7b эмпирическое значение линейного коэффициента потемнения диска звезды к краю  $x$  получается меньше теоретического значения  $x$  из таблиц коэффициентов из таблиц в работе Кларе [13]. Для звезды системы Kepler-6b эмпирический коэффициент потемнения к краю  $x$  весьма близок к теоретическому значению из таблиц Кларе [13].

Таблица 4.3: Значения ускорения силы тяжести, эффективной температуры и значения теоретического коэффициента потемнения к краю в предположение линейного закона потемнения из работы [13] для фильтра  $g$  (фотометрической системы  $ugriz$ ) для звезд систем Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7.

Система	$\lg g$	$T(K)$	$x_{teor}$
Kepler-5b	4.10	6300	0.587
Kepler-6b	4.23	5650	0.632
Kepler-7b	4.03	6000	0.609

Как выше упоминалось, помимо метода дифференциальных поправок (эквивалентного часто используемому методу Монте-Карло) в работе использован метод доверительных областей, основанный на использовании статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  (в котором рассматривается одновременное попадание истинных значений параметров модели в интервалы ошибок). Кроме того, помимо использования этих методов, которые позволяют оценить "внутренние" ошибки параметров, рассмотрена возможность использования метода доверительных областей, основанного на использовании статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ , которым можно оценить "внешние" ошибки параметров модели (см. работу [12]).

В табл.4.4 приведены центральные значения искомым параметров и их ошибки полученные на основе статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Несмотря на то,

что интервал ошибки искомых параметров увеличился в  $\sim 2$ , раза для Kepler-5b и Kepler-7b теоретические значения коэффициентов потемнения диска звезды к краю из таблиц Кларе [13] выходят за границы интервалов ошибок эмпирических значений  $x$  см.рис.4.4b.

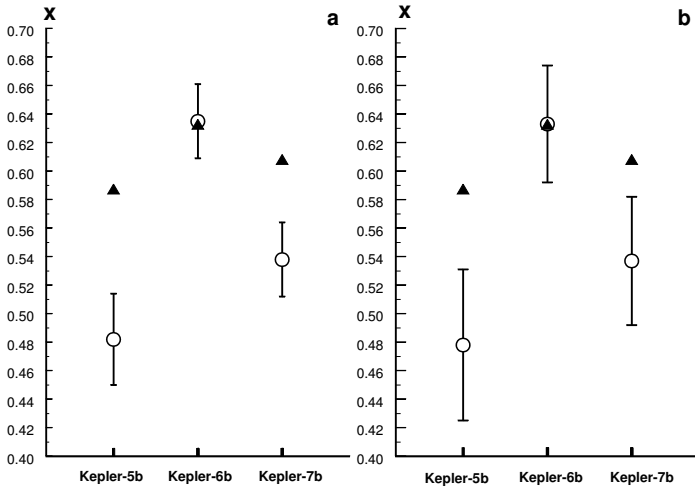


Рис 4.4: Теоретические (треугольники) и наблюдаемые (светлые кружки) значения коэффициентов потемнения диска звезды к краю полученные методом дифференциальных поправок в рамках линейного закона потемнения. **a.** Наблюдаемые значения получены методом дифференциальных поправок. Ошибка указана на уровне  $2\sigma$ . **b.** Наблюдаемые значения получены методом доверительных областей с использованием статистики с распределением  $\chi^2_p$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.95$ . Указаны проекции четырехмерной доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x)$  на ось параметра  $x$  (доверительные интервалы), которые накрывают точное значение  $x$  с вероятностью  $\gamma > 0.955\%$ .

На рис.4.5, рис.4.7, рис.4.9 приведены проекции четырехмерной доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x)$  на плоскость параметров  $i, r_p$  полученные на основе транзитных кривых блеска систем Kepler 5-b, Kepler 6-b, Kepler 7-b соответственно. А на рис.4.6, рис.4.8, рис.4.10 приведены проекции четырехмерной доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x)$  на плоскость параметров  $x, r_s$  полученные на основе транзитных кривых блеска систем Kepler 5-b, Kepler 6-b, Kepler 7-b

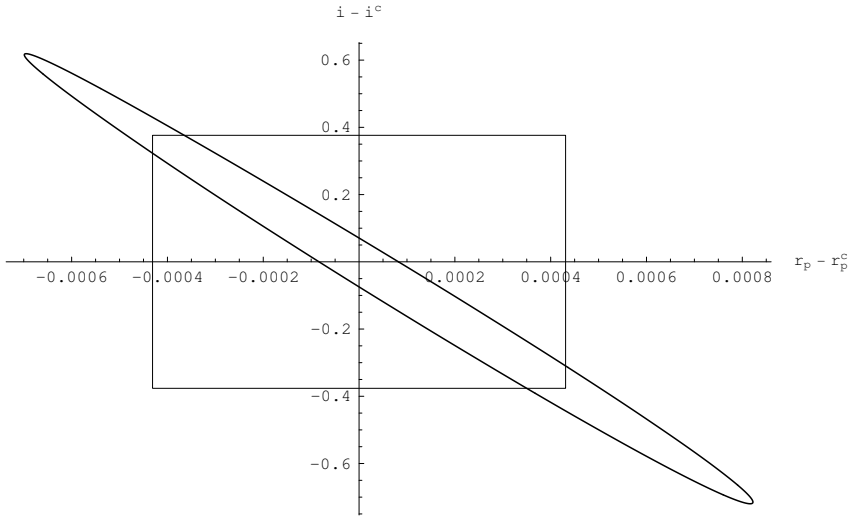


Рис 4.5: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $i, r_p$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kepler 5-b из работы [9].

соответственно. Стороны прямоугольников здесь соответствуют доверительным интервалам, полученным методом дифференциальных поправок на уровне доверия 95.5% ( $2\sigma$ ).

Также в табл.4.2 содержится значение приведенного хи-квадрат  $\chi^2_{red}$  и соответствующее ему максимально возможное для построения непустой доверительной области значение уровня значимости модели  $\alpha_0$ . Видно, что это максимальное значение уровня значимости  $\alpha_0$  не превышает  $\sim 5\%$ , что говорит о том, что используемая модель "плохая" (уровень значимости  $\alpha_0$ , то есть вероятность ошибочно отвергнуть верную модель, может быть задан только меньше 4%, а в случае Kepler-6b - только меньше 1%). Поэтому мы не можем оценить доверительные интервалы параметров в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  ( $M$  - число точек на кривых блеска) на уровне доверия 95.5%, и интервалы ошибок получены только в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  ( $P$  - число искомым параметров), уровень доверия  $\gamma$  выбран при этом равным 95.5% (а не 68%, что характерно для "хороших" моделей).

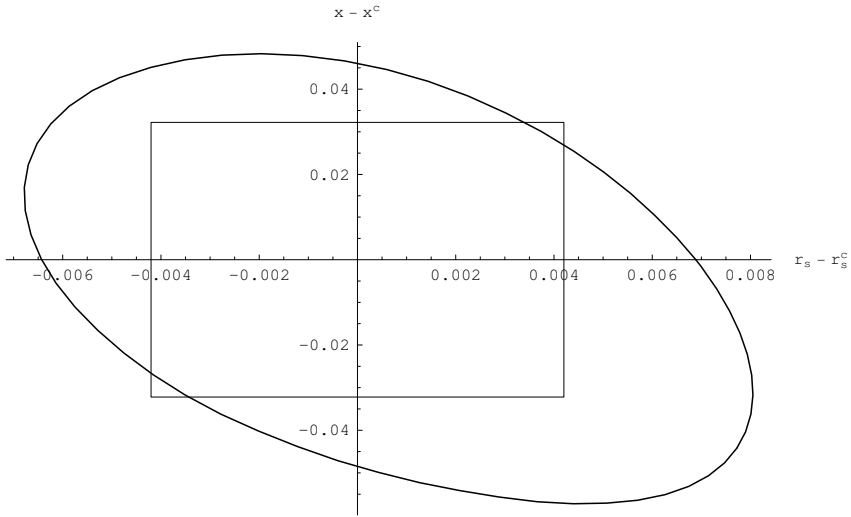


Рис 4.6: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $x, r_s$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kepler 5-b из работы [9].

Таблица 4.4: Результаты интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетой Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.95.5$ .

Система	$r_s^c$	$\Delta_P(r_s^c)$	$r_p^c$	$\Delta_P(r_p^c)$	$i^c$	$\Delta_P(i^c)$	$x$	$\Delta_P(x^c)$
Kepler-5b	0.2117	0.0074	0.01783	0.00076	81.54	0.67	0.478	0.053
Kepler-6b	0.1794	0.0047	0.01805	0.00063	82.97	0.44	0.633	0.041
Kepler-7b	0.1724	0.0055	0.01469	0.00058	83.12	0.48	0.537	0.045

### 4.3 Интерпретация кривых блеска Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в рамках квадратичного закона потемнения

Также выполнена интерпретация транзитных кривых блеска систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b в предположении квадратичного закона потемнения диска звезды к краю (1.3). Как и в предыдущем случае минимизация невязки

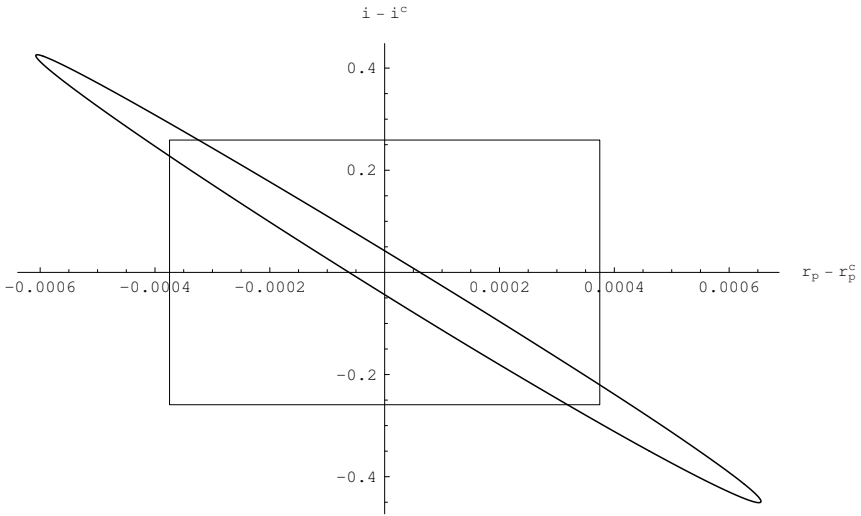


Рис 4.7: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $i, r_p$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kepler 6-b из работы [10].

производилась одновременно по всем параметрам. Искомыми параметрами являлись радиус звезды  $r_s$ , радиус планеты  $r_p$ , наклонение орбиты  $i$ , линейный  $x$  и квадратичный  $y$  коэффициент потемнения звездного диска к краю (1.3).

Также как и в предыдущем случае интерпретация наблюдаемых кривых блеска проводилась в рамках метода дифференциальных поправок и в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ , а в случае со звездой Kepler-5 также и с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Результаты анализа наблюдаемых кривых блеска представлены в табл.4.5, табл.4.6, табл.4.8.

В табл.4.5 содержится значение приведенного хи-квадрат  $\chi^2_{red}$  и соответствующее ему значение уровня значимости модели  $\alpha$ . Видно, что в случае предположения квадратичного закона потемнения звезды приведенное значение невязки  $\chi^2_{red}$  несколько уменьшилось (см. табл. 4.2 и табл.4.5), что позволяет в случае звезды Kepler-5b для оценки интервалов ошибок на уровне доверия 95% использовать также и статистику с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень значимости  $\alpha$  не превышает  $\sim 7\%$ , что говорит о том, что используемая модель не очень хорошая (модель двойной не отвергаются на уровне значимости  $\alpha \lesssim 5 - 7\%$ , а в случае Kepler-6b  $\alpha < 1.3\%$ ).



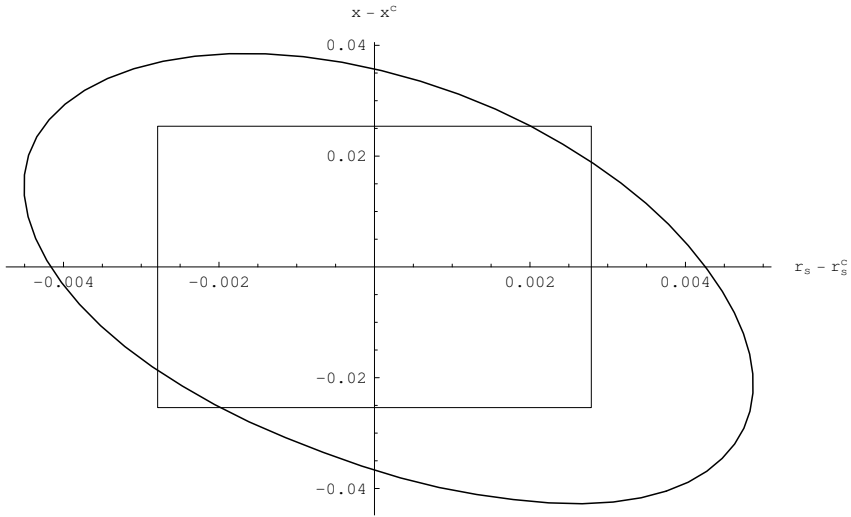


Рис 4.8: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $x, r_s$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kepler 6-b из работы [10].

Таблица 4.5: Результаты интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетой Kepler-5, Kepler-6, Kepler-7 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ .

Система	$r_s^c$	$2\sigma$	$r_p^c$	$2\sigma$	$i^c$	$2\sigma$	$x$	$2\sigma$	$y$	$2\sigma$	$\chi_{red}^2$	$\alpha$
Kepler-5b	0.2091	0.0056	0.01716	0.00068	81.91	0.58	-0.07	0.36	0.75	0.52	1.0485	0.0695
Kepler-6b	0.1785	0.0032	0.01767	0.00054	83.15	0.36	0.38	0.24	0.38	0.38	1.0722	0.0133
Kepler-7b	0.1711	0.0038	0.01433	0.00052	83.30	0.38	0.23	0.32	0.44	0.46	1.0538	0.0502

Таблица 4.6: Результаты интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетой Kepler-5 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.95.5$ .

Система	$r_s^c$	$\Delta_M(r_s^c)$	$r_p^c$	$\Delta_M(r_p^c)$	$i^c$	$\Delta_M(i^c)$	$x$	$\Delta_M(x^c)$	$y$	$\Delta_M(y^c)$
Kepler-5b	0.2052	0.0099	0.0169	0.0014	88.94	0.33	-0.16	0.68	0.96	1.02

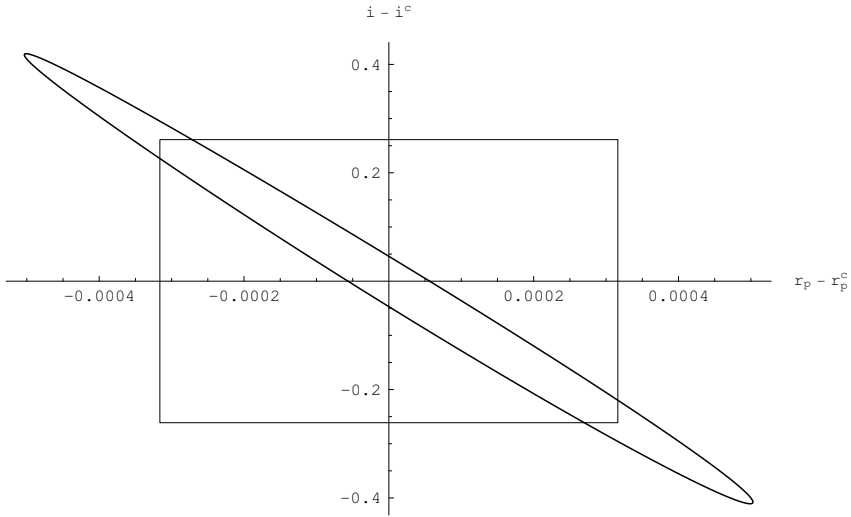


Рис 4.9: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $i, r_p$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kepler 7-b из работы [11].

Таблица 4.7: Значения ускорения силы тяжести, эффективной температуры и значения теоретического коэффициента потемнения к краю в предположение квадратичного закона потемнения из работы [13] для фильтра  $r$  (фотометрической системы  $ugriz$ ) для звезд систем Kepler-5b, Kepler-6b, Kepler-7b.

Система	$\lg g$	$T(K)$	$x_{teor}$	$y_{teor}$
Kepler-5b	4.1	6300	0.279	0.363
Kepler-6b	4.23	5650	0.366	0.314
Kepler-7b	4.03	6000	0.316	0.344

Значения коэффициентов потемнения звездного диска к краю в нелинейном законе, полученные при интерпретации наблюдаемых кривых блеска как методом дифференциальных поправок, так и методом доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_p$ , а в случае звезды Kepler-5b также и с использованием статистики, распределенной по закону  $\chi^2_M$ , на выбранном уровне доверия  $\gamma = 0.95$  в пределах интервала ошибок согласуются с теоретическими значениями таблиц Кларе [13] см. рис.4.11 и рис.4.12.

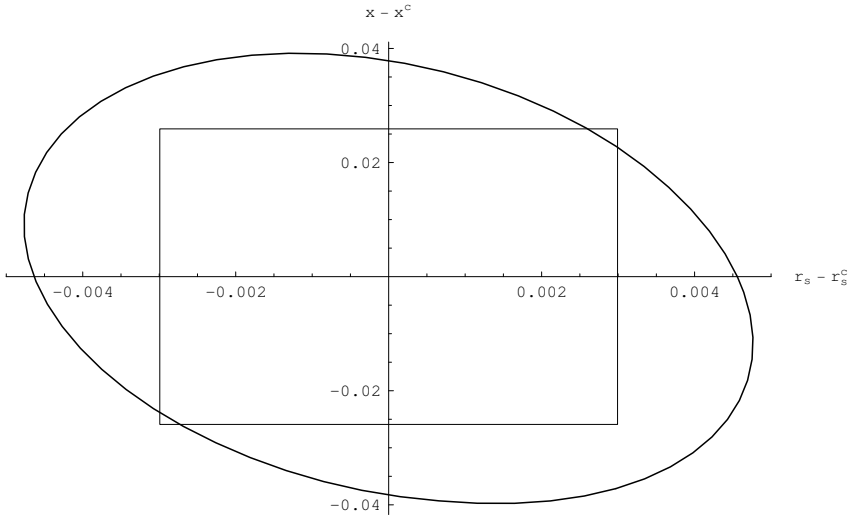


Рис 4.10: Проекция доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  (на уровне доверия 95.5%) на плоскость  $x, r_s$  в модели с линейным законом потемнения. "Эллипс" - доверительная область  $D$ , полученная с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Стороны прямоугольника соответствуют проекциям доверительных интервалов полушириной  $2\sigma_{est}$  (полученных методом дифференциальных поправок). Проекция доверительной области  $D$  получена на основе наблюдаемой кривой блеска Kerler 7-b из работы [11].

Таблица 4.8: Результаты интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетой Kerler-5b, Kerler-6b, Kerler-7b в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.95$ .

Система	$r_s^c$	$\Delta_P(r_s^c)$	$r_p^c$	$\Delta_P(r_p^c)$	$i^c$	$\Delta_P(i^c)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1^c)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1^c)$
Kepler5	0.2062	0.0089	0.0169	0.0012	88.93	0.30	-0.20	0.55	0.92	0.90
Kepler6	0.1786	0.0053	0.01770	0.00091	89.18	0.14	0.37	0.42	0.42	0.67
Kepler7	0.1699	0.0063	0.01421	0.00089	89.25	0.16	0.14	0.47	0.55	0.76

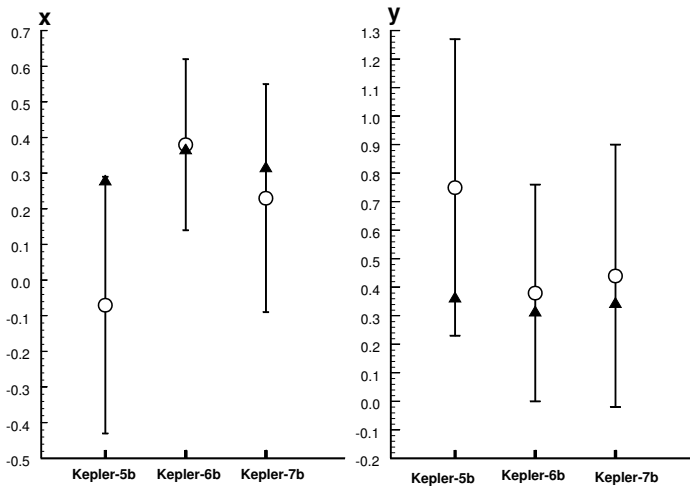


Рис 4.11: Теоретические (треугольники) и наблюдаемые (светлые кружки) значения коэффициентов потемнения диска звезды к краю полученные методом дифференциальных поправок в предположении квадратичного закона потемнения. Ошибка указана на уровне  $2\sigma$ .

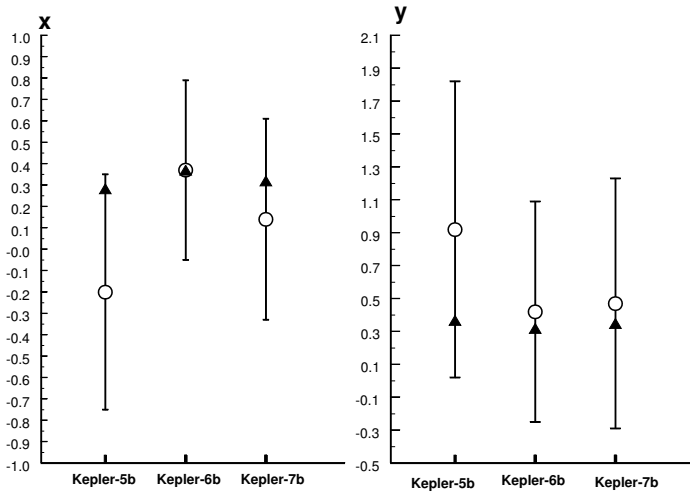


Рис 4.12: Теоретические (треугольники) и наблюдаемые (светлые кружки) значения коэффициентов потемнения диска звезды к краю полученные в предположении квадратичного закона потемнения. Наблюдаемые значения получены методом доверительных областей с использованием статистики с распределением  $\chi^2_p$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.95$ . Указаны проекции пятимерной доверительной области  $D(r_s, r_p, i, x, y)$  на оси параметров  $x$  и  $y$ , (доверительные интервалы) которые накрывают точное значение  $x$  и  $y$  с вероятностью  $\gamma > 0.95.5\%$ .

## Глава 5

# Интерпретация кривых блеска HD189733 в рамках линейного и квадратичного закона потемнения

### 5.1 Наблюдательный материал

Анализируется многоцветная транзитная кривая блеска двойной системы с экзопланетой HD189733 из работы [8]. Кривые блеска были получены на космическом телескопе имени Хаббла (HST) в течении трех наблюдательных сетов с длительностью каждого в пять орбитальных витков космической обсерватории. Сеты наблюдений проведены 22 мая, 26 мая и 14 июля 2006 года.

Наблюдения HD 189733 проведены с помощью Advanced Camera for Surveys (ACS) в режиме HRC. В конечном итоге наблюдений получены десять затменных кривых блеска в диапазоне  $\lambda\lambda = 5500 - 6000\text{Å}, 6000 - 6500\text{Å}, 6500 - 7000\text{Å}, 7000 - 7500\text{Å}, 7500 - 8000\text{Å}, 8000 - 8500\text{Å}, 8500 - 9000\text{Å}, 9000 - 9500\text{Å}, 9500 - 10000\text{Å}, 10000 - 10500\text{Å}$ . Более детальная информация о наблюдательных данных содержится в работе [8]. Далее, при анализе кривых блеска мы принимаем следующие центральные длины волн:  $\lambda\lambda = 5750\text{Å}, 6250\text{Å}, 6750\text{Å}, 7250\text{Å}, 7750\text{Å}, 8250\text{Å}, 8750\text{Å}, 9250\text{Å}, 9750\text{Å}, 10250\text{Å}$ .

Каждая кривая блеска включает в себя 675 индивидуальных значений блеска. На рис.5.1 представлена наблюдаемая кривая блеска полученная в диапазоне длин волн  $\lambda = 5500 - 6000\text{Å}$  (центральная  $\lambda = 5750\text{Å}$ ).

Из рис.5.1 видно, что пятна на поверхности звезды (см. работу [8]) оказывают весьма заметное возмущение на изменения блеска в фазах затмения. Также заметен сдвиг правой и левой части кривой блеска относительно друг друга по оси ординат, вызванный наличием либо пятна на поверхности звезды, либо систематической ошибки в наблюдениях. Перечисленные особенности потребовали внимательного анализа, а также некоторой корректировки кривой блеска.

Предполагалось, что ошибки наблюдений описываются нормальным законом распределения. Дисперсия  $\sigma^2$  индивидуальных значений кривой блеска полагалась одинаковой для всех точек той части кривой блеска, по которой проводилась интерпретация. Ее значение получено путем усреднения квадратов отклонения наблюдаемых внезатменных значений блеска от среднего значения внезатменного

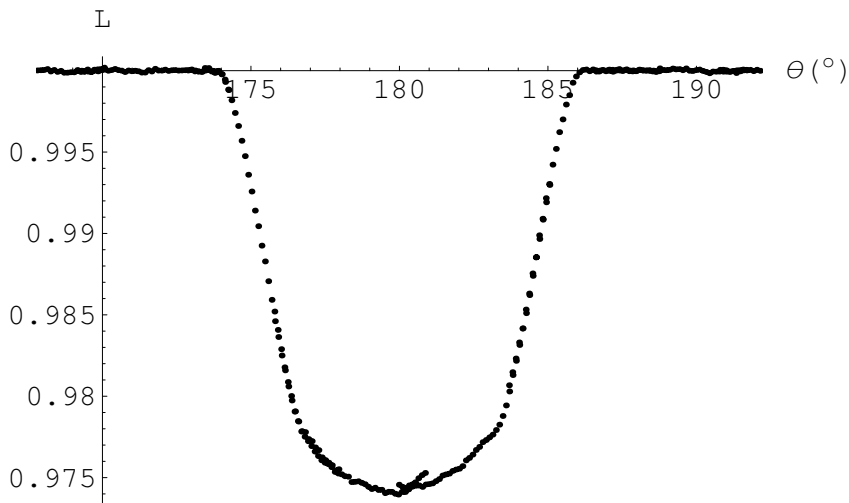


Рис 5.1: Кривая блеска HD 189733 из работы [39]. Фильтр  $\lambda = 5500 - 6000$  (кривая блеска 1). Кривая блеска с обрезанными крыльями, но со скачком блеска в минимуме (вызванным наличием "пятна" на поверхности звезды).

блеска совместно по левой и правой ветвям кривой блеска, отдельно по левой и отдельно по правой ветви кривой блеска. Полученные значения  $\sigma$  и были приняты за стандартное отклонение индивидуального измерения блеска при интерпретации по соответствующей части.

Таблица 5.1: Стандартное отклонение и средний внезатменный блеск кривых блеска.

$\lambda(\text{\AA})$	$L_{both}$	$\sigma_{both}$	$M_{both}$	$L_{left}$	$\sigma_{left}$	$M_{left}$	$L_{right}$	$\sigma_{right}$	$M_{right}$
5750	0.99998229	0.00007672	146	0.99997273	0.000078	79	0.99999736	0.000065	67
6250	0.99997042	0.0003168	146	0.99994661	0.00035	79	1.0000079	0.00026	67
6750	0.99994702	0.0002085	145	0.9999172	0.00022	78	0.99999414	0.00017	67
7250	0.99996076	0.0001496	145	0.99993531	0.00016	78	1.000001	0.0001	67
7750	0.99997562	0.0001421	146	0.99996303	0.00014	79	0.99999546	0.00014	67
8250	0.99999351	0.0001321	147	0.99999245	0.00013	80	0.99999517	0.00013	67
8750	1.0000042	0.0001558	147	1.0000095	0.00016	80	0.9999958	0.00015	67
9250	0.99999268	0.0001766	147	0.99999	0.00018	80	0.9999969	0.00017	67
9750	1.0000026	0.0002123	145	1.0000063	0.00022	78	0.99999678	0.0002	67
10250	1.0000438	0.0003353	148	1.0000711	0.00036	80	1.0000006	0.00028	68

Предварительно мы исключили внезатменную часть первого сета наблюдений с фазой  $\theta < 160^\circ$ , в которой присутствовал явный систематический сдвиг относительно всех остальных значений кривой блеска внезатменной части.

Средний внезатменный блеск  $L$ , стандартное отклонение индивидуального измерения блеска  $\sigma$ , и число точек наблюдения в затмении  $M$  для каждой кривой блеска (обеих ветвей в совокупности с индексом *both*, левой ветви в отдельности с

индексом left, правой ветви в отдельности с индексом right) приведены в табл.5.1. Видно, что точность наблюдаемой кривой блеска составляет  $\sim 10^{-4}$ , что по отношению к глубине затмения составляет  $\sim 1\%$ .

Главной особенностью наблюдаемых затменных кривых блеска являлось наличие возмущения в минимуме (в районе  $180^\circ < \theta < 190^\circ$  для точек из первого сета наблюдений), вызванное наличием пятен на поверхности звезды [8]. Кроме того, если даже исключить из рассмотрения упомянутое возмущение, то ход кривой блеска вблизи минимума заметно искажается при  $\theta \sim 180^\circ$ . Поэтому кроме интерпретации с использованием всех точек кривой блеска мы провели интерпретацию без использования точек с  $\theta > 180^\circ$  (интерпретацию левой (нисходящей) ветви кривой блеска) и интерпретацию без использования точек с  $\theta < 180^\circ$  (интерпретацию правой, (восходящей) ветви кривой блеска). Окончательные кривые блеска, анализ которых проведен в работе представлены на рис.5.2. Для наглядности нуль-пункты кривых блеска для разных  $\lambda$  смещены друг относительно друга. Там же даны теоретические кривые блеска и соответствующие им кривые невязок, вычисленные в рамках оптимальной модели с квадратичным законом потемнения.

## 5.2 Метод интерпретации

Использовалась описанная в разделе 3.2 модель двух сферических звезд на круговой орбите, в отсутствие эффектов отражения и эллипсоидальности. Пятна на поверхности звезды отсутствуют. При массе звезды и планеты  $m_s = 0.825M_\odot$  и  $m_p = 1.15M_{Jup}$  соответственно [40], средний относительный радиус полости Роша для планеты, рассчитанный с помощью формулы Эгглтона [38], составляет  $R_R/a = 0.0531$ , где  $a$  – радиус относительной орбиты системы. Поскольку относительный радиус планеты  $r_p = R_p/a \simeq 0.0175$  (см. ниже), степень заполнения планетой своей полости Роша  $\mu_p \simeq 0.33$ , что значительно меньше 0.5. Поэтому сферическое приближение для планеты является вполне удовлетворительным (если пренебречь сплюснутостью планеты, обусловленной ее осевым вращением). То же самое можно сказать и об оптической звезде. С другой стороны, как отмечалось выше, в оптическом диапазоне спектра амплитуда изменений блеска, обусловленных эффектом отражения, должна составлять, в фазах затмения, менее  $10^{-5}$  звездной величины, что пренебрежимо мало. В работе [39] была заподозрена слабая зависимость радиуса экзопланеты в системе HD189733 от длины волны, что может свидетельствовать о наличии атмосферы у экзопланеты. Рефракция света звезды в атмосфере экзопланеты может приводить к искажению кривой блеска при затмении звезды планетой. Эффекты рефракции света в затменных двойных системах были рассчитаны в работе Кудзея [41]. Эти эффекты должны приводить к наличию небольших горбиков (поярчаний) на кривой блеска перед затмением и после затмения, а также в середине затмения. Поскольку такие горбики на кривых блеска HD189733 не наблюдаются, можно предполагать, что влияние эффектов рефракции на кривые блеска системы HD189733 пренебрежимо мало.

В работе [42] исследовано влияние эффектов гравитационного микролинзирования на кривую блеска при затмении звезды экзопланетой. Показано, что эффекты микролинзирования существенны лишь для звезд, размеры орбит экзопланет



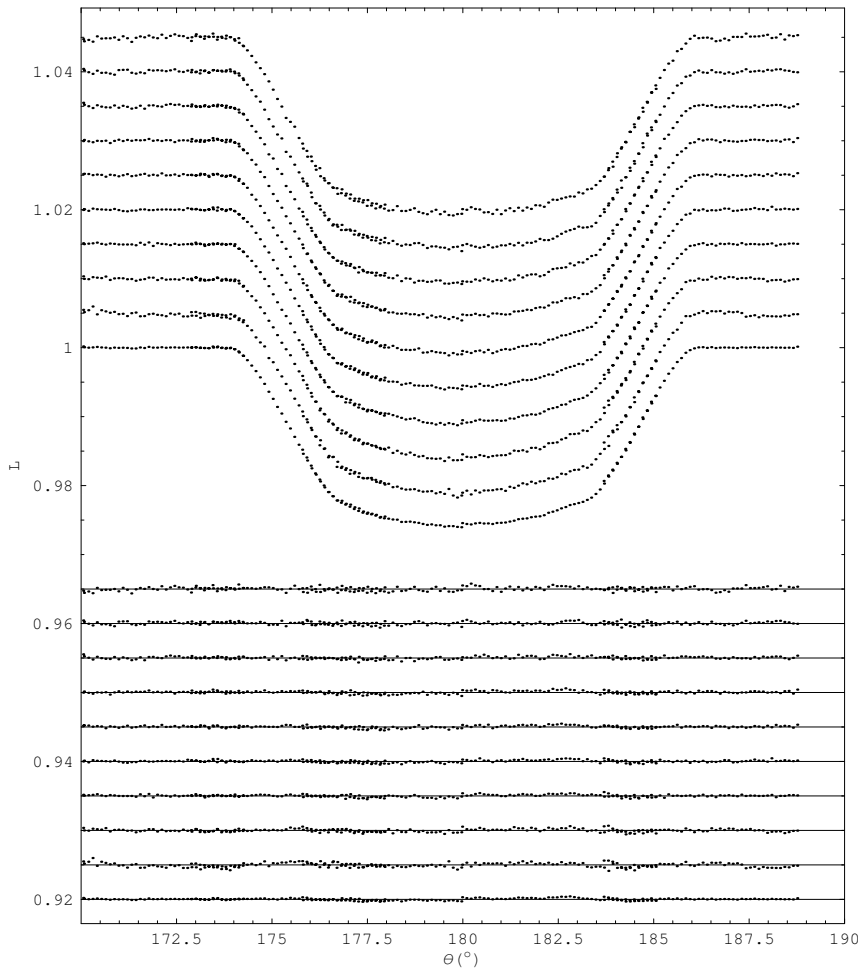


Рис 5.2: Кривые блеска HD 189733. Фильтр  $\lambda = 5500-10500$ . Длина волны возрастает снизу вверх. Внизу приведены невязки для случая квадратичного закона потемнения при оптимальных значениях параметров

которых превышают 10 астрономических единиц (соответствующее значение орбитального периода  $P > 10$  лет). Таким образом, наша модель двух сферических компонент вполне применима к анализу кривых блеска системы HD189733.

## Интерпретация кривых блеска в рамках линейного закона потемнения

При анализе наблюдаемых кривых блеска искомыми параметрами являлись: радиус звезды  $r_s$ , радиус экзопланеты  $r_p$ , наклонение орбиты  $i$  и коэффициент потемнения  $x$  в предположении линейного закона потемнения. Спектральный класс звезды в системе HD 189733 описывается как K2V[40]. Орбитальный период принят равным  $P_{orb} = 2^d.218581$  [8], отношение масс планеты и звезды  $q = m_p/m_s = 0.014$  [8], орбита системы предполагалась круговой, радиус относительной орбиты принят равным единице. Минимизация невязки проводилась одновременно по всем искомым параметрам. Использовались наблюдательные точки в интервале фаз, охватывающих лишь затменную часть кривой блеска (количества этих точек  $M$  для соответствующих частей кривых блеска приведены в табл. 5.1). Внезатменные участки кривых блеска при интерпретации не использовались, так как они были использованы для независимого определения стандартных отклонений кривых блеска (табл. 5.1)

### Метод дифференциальных поправок

В табл.5.2, табл.5.3, табл.5.4 приведены результаты интерпретации левой части, правой части транзитной кривой блеска, а также всей кривой блеска соответственно. Здесь центральные значения параметров и их ошибки (на уровне  $2\sigma$ ) получены методом дифференциальных поправок. Поскольку в нашем случае используемая модель оказывается чаще всего "плохой" (см.ниже), мы вынуждены указывать ошибки параметров на уровне  $2\sigma$ , что соответствует уровню доверия  $\gamma = 95.5\%$ .

Помимо значений искомых параметров, в табл.5.2, табл.5.3, табл.5.4 приведены также значения минимального приведенного хи-квадрат  $\chi^2_{red} = (\chi^2_{M-P})_{min}/(M - P)$ , а также значения критического уровня значимости  $\alpha_0$ . Значение  $\chi^2_{red}$ , как уже отмечалось выше, может служить для проверки адекватности модели наблюдательным данным.

Таблица 5.2: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{est}(i^c)^c(^{\circ})$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi^2_{red}$	$\alpha_0$
5750	0.11184	0.00054	0.01760	0.00011	85.715	0.054	0.555	0.017	2.3457	$1.9 \cdot 10^{-9}$
6250	0.1139	0.0011	0.01790	0.00025	85.60	0.11	0.609	0.057	0.51644	0.99996
6750	0.11185	0.00090	0.01765	0.00020	85.697	0.091	0.615	0.028	0.78673	0.956
7250	0.11133	0.00073	0.01751	0.00016	85.754	0.073	0.590	0.022	0.96149	0.695
7750	0.11172	0.00066	0.01758	0.00014	85.716	0.065	0.556	0.020	1.1113	0.345
8250	0.11219	0.00073	0.01768	0.00015	85.693	0.072	0.540	0.023	1.5651	0.0031
8750	0.11225	0.00072	0.01765	0.00015	85.682	0.071	0.519	0.023	1.0306	0.53
9250	0.11186	0.00080	0.01756	0.00016	85.731	0.079	0.490	0.025	1.0506	0.48
9750	0.1110	0.0010	0.01740	0.00021	85.79	0.10	0.479	0.033	1.1975	0.19
10250	0.1117	0.0013	0.01755	0.00026	85.75	0.13	0.497	0.041	0.69904	0.99

Проверка адекватности модели показала (см. табл.5.2, 5.3, 5.4), что в большинстве случаев наша модель является "плохой". В случае интерпретации правой ветви

кривой блеска (табл.5.3) и всей кривой блеска (табл.5.4) величина  $\chi_{red}^2$  для большинства длин волн  $\lambda$  существенно превосходит единицу, и соответствующее значение критического уровня значимости  $\alpha_0$  весьма мало, составляет несколько процентов, а в некоторых случаях, близко к нулю. Кроме того для отдельных длин волн величина  $\chi_{red}^2$  существенно меньше единицы, а соответствующее значение критического уровня значимости  $\alpha_0 > 50\%$ . Это, как уже было отмечено выше, скорее всего, свидетельствует о скоррелированности наблюдательных точек на кривой блеска, что может свидетельствовать о наличии систематических ошибок в наблюдательных данных.

Таблица 5.3: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (правой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{est}(i^c(^{\circ}))$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11159	0.00069	0.01738	0.00015	85.793	0.072	0.578	0.023	4.2535	0
6250	0.1124	0.0015	0.01761	0.00034	85.71	0.16	0.590	0.053	1.3380	0.075155
6750	0.1118	0.0012	0.01746	0.00028	85.77	0.13	0.631	0.041	1.9672	0.000029131
7250	0.11164	0.00085	0.01741	0.00019	85.791	0.091	0.617	0.028	2.6644	$1.2811 \cdot 10^{-10}$
7750	0.11173	0.00086	0.01740	0.00019	85.784	0.091	0.593	0.029	1.4333	0.030473
8250	0.11177	0.00078	0.01742	0.00017	85.786	0.082	0.570	0.026	1.3065	0.098526
8750	0.11185	0.00088	0.01738	0.00019	85.771	0.092	0.534	0.030	1.4180	0.035518
9250	0.11104	0.00092	0.01725	0.00019	85.845	0.097	0.521	0.032	1.1435	0.31474
9750	0.1108	0.0012	0.01727	0.00025	85.84	0.12	0.497	0.042	1.4684	0.021212
10250	0.1110	0.0013	0.01726	0.00027	85.83	0.13	0.506	0.045	0.84083	0.89432

В случае интерпретации левой ветви кривой блеска (табл.5.2) для трех длин волн из десяти значение  $\chi_{red}^2$  меньше единицы, а соответствующая величина  $\alpha_0 > 50\%$ . Это свидетельствует о том, что, скорее всего, левая ветвь кривой блеска наиболее сильно подвержена влиянию систематических ошибок. Как отмечалось выше, именно эти трудности ( $\chi_{red}^2 < 1$  и  $\chi_{red}^2$  существенно превышающие единицу) с интерпретацией кривых блеска системы HD189733 вынуждают нас выбрать уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$  (что соответствует  $2\sigma$  в методе дифференциальных поправок), а не  $68\%$ , что характерно для "хороших" моделей. По этой же причине для случаев правой ветви кривой блеска (табл.5.3) и полной кривой блеска (табл.5.4) нам не удалось построить "точные" доверительные области  $D$  в рамках статистики с законом распределения  $\chi_M^2$  и дать наиболее консервативные оценки "внешних" ошибок параметров. Мы ограничились лишь построением асимптотических доверительных областей для искомых параметров с использованием статистики, с законом распределения  $\chi_P^2$ . Для случая левой ветви кривой блеска нам удалось построить доверительные области как в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ , так и в рамках статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ .

#### Метод доверительных областей

В качестве статистики метода доверительных областей мы использовали статистику с законом распределения  $\chi_P^2$  ( $P$  – число искомых параметров) и  $\chi_M^2$  ( $M$  – число точек наблюдения). Для работы принят уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ , что в

случае метода дифференциальных поправок соответствует  $2\sigma$ , где  $\sigma$  – стандартное отклонение. Статистика с законом распределения  $\chi_M^2$  использовалась лишь для левой ветви кривой блеска. Результаты интерпретации левой ветви кривой блеска в рамках метода доверительных областей с использованием статистики  $\chi_M^2$  представлены в табл.5.8.

Таблица 5.4: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (по правой и левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{est}(i^c)^{(\circ)}$	$x^c$	$2\sigma_{est}(x^c)$	$\chi_{red}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11192	0.00059	0.01755	0.00012	85.726	0.060	0.556	0.019	5.5168	0
6250	0.1129	0.0011	0.01780	0.00024	85.64	0.11	0.600	0.036	1.0071	0.55
6750	0.11204	0.00086	0.01761	0.00019	85.706	0.088	0.614	0.028	1.5321	0.00010
7250	0.11171	0.00068	0.01753	0.00015	85.740	0.070	0.591	0.022	1.9306	$6 \cdot 10^{-10}$
7750	0.11196	0.00068	0.01756	0.00014	85.717	0.069	0.561	0.022	2.0916	$10^{-12}$
8250	0.11215	0.00066	0.01760	0.00014	85.715	0.067	0.545	0.022	2.2529	$4 \cdot 10^{-15}$
8750	0.11230	0.00073	0.01758	0.00015	85.695	0.073	0.515	0.024	2.0264	$2 \cdot 10^{-11}$
9250	0.11166	0.00070	0.01747	0.00014	85.758	0.071	0.494	0.023	1.4922	0.00029
9750	0.11103	0.00080	0.01736	0.00016	85.804	0.080	0.482	0.026	1.3541	0.0063
10250	0.11150	0.00096	0.01745	0.00020	85.765	0.097	0.493	0.032	0.79637	0.98

Результаты интерпретации в рамках метода доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  приведены в табл.5.5, 5.6, 5.7. Здесь даны оптимальные значения параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ , а также их ошибки, которые характеризуются проекцией асимптотической доверительной области  $D$ , в пространстве четырех искоемых параметров на оси параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$  (доверительными интервалами). Для удобства сравнения с ошибками, полученными в методе дифференциальных поправок (см. табл.5.2 - 5.4), в табл.5.5 – 5.7 приведены величины  $\Delta_p$ , представляющие собой половины доверительных интервалов. В случае метода доверительных областей в таблицах указаны не центральные значения искоемых параметров, а значения параметров, соответствующие серединам доверительных интервалов. Вероятность накрытия точных значений каждого из параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$  соответствующим доверительным интервалом превышает 95.5%. Вероятность накрытия точного решения задачи (совокупности всех параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x$ ) асимптотической доверительной областью близка к заданной вероятности  $\gamma = 95.5\%$ , поскольку число точек на кривой блеска велико ( $M \gtrsim 70$ ). Вероятность накрытия точного решения всеми доверительными интервалами одновременно превышает заданный уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ .

### 5.3 Зависимость от длины волны радиуса планеты и коэффициента потемнения к краю звезды в предположении линейного закона

Наша модель с линейным законом потемнения в применении к системе HD189733 для большинства длин волн оказалась "плохой". Это неудивительно, поскольку, согласно работе [39], на кривых блеска в системе HD189733 наблюдаются следы проявления пятен на поверхности звезды, которые не учитываются в нашей модели. Лишь в случае левой ветви кривой блеска наша модель с линейным законом

Таблица 5.5: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (по левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11184	0.00055	0.01760	0.00011	85.715°	0.054°	0.555	0.017
6250	0.1130	0.0025	0.01788	0.00055	85.61°	0.25°	0.607	0.080
6750	0.1118	0.0016	0.01764	0.00035	85.70°	0.16°	0.614	0.049
7250	0.1113	0.0012	0.01751	0.00025	85.76°	0.12°	0.590	0.035
7750	0.11171	0.00094	0.01758	0.00020	85.717°	0.092°	0.556	0.029
8250	0.11217	0.00091	0.01767	0.00019	85.695°	0.090°	0.540	0.029
8750	0.1123	0.0011	0.01765	0.00022	85.68°	0.10°	0.518	0.034
9250	0.1119	0.0012	0.01756	0.00025	85.73°	0.12°	0.490	0.040
9750	0.1110	0.0015	0.01739	0.00029	85.79°	0.14°	0.477	0.046
10250	0.1117	0.0026	0.01754	0.00053	85.75°	0.26°	0.493	0.082

Таблица 5.6: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (по правой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11159	0.00052	0.01738	0.00011	85.794°	0.055°	0.578	0.018
6250	0.1124	0.0019	0.01760	0.00043	85.72°	0.20°	0.589	0.069
6750	0.1118	0.0013	0.01745	0.00031	85.77°	0.14°	0.631	0.046
7250	0.11164	0.00082	0.01741	0.00019	85.792°	0.089°	0.617	0.028
7750	0.1117	0.0011	0.01739	0.00025	85.79°	0.12°	0.593	0.038
8250	0.1118	0.0010	0.01742	0.00023	85.79°	0.11°	0.570	0.036
8750	0.1118	0.0011	0.01737	0.00024	85.77°	0.12°	0.533	0.039
9250	0.1110	0.0013	0.01725	0.00028	85.85°	0.14°	0.520	0.046
9750	0.1108	0.0015	0.01726	0.00031	85.85°	0.16°	0.496	0.053
10250	0.1110	0.0022	0.01725	0.00045	85.83°	0.23°	0.503	0.076

потемнения для большинства длин волн отвергается на достаточно высоком уровне значимости, и в данном случае мы можем оценить наиболее консервативные "внешние" ошибки параметров на уровне доверия  $\gamma = 95.5\%$ , используя статистику с законом распределения  $\chi^2_M$  (см. табл.5.8).

В работе [39] получена зависимость отношения радиуса экзопланеты к радиусу звезды  $r_p/r_s$  от длины волны в системе HD189733. В табл.5.9 мы приводим наши результаты, основанные на анализе полных кривых блеска, и результаты из работы [39]. Поскольку в нашем случае ищется не отношение  $r_p/r_s$ , а параметры  $r_p$ ,  $r_s$  в отдельности, ошибка  $r_p/r_s$  получена методом дифференциальных поправок как ошибка для нового параметра. По общей формуле 2.17 для стандартных отклонений

Таблица 5.7: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (по правой и левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x$	$\Delta_P(x)$
5750	0.11192	0.00039	0.017552	0.000083	85.726°	0.040°	0.556	0.013
6250	0.1129	0.0017	0.01780	0.00036	85.64°	0.17°	0.598	0.055
6750	0.1120	0.0011	0.01761	0.00024	85.71°	0.11°	0.614	0.035
7250	0.11170	0.00078	0.01752	0.00017	85.743°	0.080°	0.591	0.025
7750	0.11194	0.00072	0.01755	0.00015	85.719°	0.072°	0.562	0.023
8250	0.11215	0.00068	0.01760	0.00014	85.715°	0.069°	0.545	0.022
8750	0.11229	0.00078	0.01758	0.00016	85.698°	0.078°	0.515	0.026
9250	0.11166	0.00093	0.01747	0.00019	85.759°	0.095°	0.493	0.031
9750	0.1110	0.0010	0.01736	0.00021	85.81°	0.10°	0.482	0.034
10250	0.1115	0.0017	0.01745	0.00036	85.77°	0.18°	0.491	0.058

Таблица 5.8: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (по левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках линейного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_M(r_s)$	$r_p$	$\Delta_M(r_p)$	$i$	$\Delta_M(i)$	$x$	$\Delta_M(x)$
6250	0.1127	0.0066	0.0178	0.0014	85.67°	0.67°	0.59	0.22
6750	0.1118	0.0034	0.01761	0.00074	85.71°	0.34°	0.61	0.10
7250	0.1113	0.0020	0.01750	0.00043	85.76°	0.20°	0.589	0.061
7750	0.1117	0.0013	0.01758	0.00027	85.72°	0.13°	0.556	0.040
8750	0.1122	0.0017	0.01765	0.00035	85.69°	0.17°	0.517	0.055
9250	0.1118	0.0019	0.01755	0.00039	85.74°	0.19°	0.488	0.061
9750	0.1110	0.0016	0.01739	0.00032	85.79°	0.16°	0.477	0.051
10250	0.1116	0.0059	0.0175	0.0012	85.78°	0.61°	0.47	0.19

при замене параметров в данном случае следует:

$$\sigma(r_p^c/r_s^c) = \sqrt{\left(\frac{r_p^c}{r_s^c}\right)^2 \sigma^2(r_s^c) - 2\mathbf{cov}(r_p^c, r_s^c) \left(\frac{r_p^c}{r_s^c}\right) \left(\frac{1}{r_s^c}\right) + \left(\frac{1}{r_s^c}\right)^2 \sigma^2(r_p^c)}$$

где  $\mathbf{cov}(\cdot, \cdot)$  – операция нахождения ковариаций случайных величин. У нас ошибки получаются больше чем в работе [39], поскольку в этой работе интерпретация проводилась только по геометрическим параметрам  $r_s, r_p, i$  при фиксированных коэффициентах потемнения к краю. В нашем же случае интерпретация проводится как по геометрическим параметрам, так и по коэффициентам потемнения к краю, и большее число степеней свободы модели приводит к увеличению величины ошибок искомых параметров.

Таблица 5.9: Сравнение зависимости от длины волны отношения радиусов планеты и звезды  $r_p/r_s$  из нашей работы и работы Понта и др. [39]. В качестве ошибки приведено значение  $1\sigma$ .

$\lambda(\text{\AA})$	Наши расчеты	Из работы [39]
5750	$0.156894 \pm 0.000281$	$0.156903 \pm 0.000095$
6250	$0.157762 \pm 0.000658$	$0.156744 \pm 0.000065$
6750	$0.157387 \pm 0.000458$	$0.156552 \pm 0.000057$
7250	$0.157045 \pm 0.000341$	$0.156388 \pm 0.000059$
7750	$0.156917 \pm 0.000358$	$0.156501 \pm 0.000064$
8250	$0.156984 \pm 0.000348$	$0.156210 \pm 0.000073$
8750	$0.156569 \pm 0.000388$	$0.156147 \pm 0.000081$
9250	$0.156451 \pm 0.000391$	$0.156120 \pm 0.000092$
9750	$0.156361 \pm 0.000463$	$0.156097 \pm 0.000125$
10250	$0.156389 \pm 0.000611$	$0.155716 \pm 0.000218$

Как видно из рис. 5.3, намечается некоторое увеличение радиуса планеты с уменьшением длины волны. Этот эффект является значимым на уровне  $1\sigma$ . Однако если отложить ошибки на уровне  $2\sigma$ , то это увеличение является незначимым. Систематически большее значение радиуса экзопланеты в нашем случае (на 0.3%) по сравнению с данными работы [8] вызвано различием в способе нормировки кривой блеска и с тем, что в нашем случае коэффициент потемнения не фиксировался, а искался совместно с другими параметрами задачи.

Таблица 5.10: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_p$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s^c$	$2\sigma_{est}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{est}(i^c(^{\circ}))$	$x_1^c$	$2\sigma_{est}(x_1^c)$	$y_1^c$	$2\sigma_{est}(y_1^c)$	$\chi^2_{red}$	$\alpha_p$
5750	0.11207	0.00083	0.01754	0.00022	85.721	0.077	0.44	0.16	0.18	0.26	2.3115	$8 \cdot 10^{-9}$
6250	0.1132	0.0020	0.01782	0.00050	85.62	0.17	0.50	0.37	0.16	0.60	0.52219	0.99997
6750	0.1120	0.0014	0.01759	0.00035	85.70	0.12	0.52	0.26	0.14	0.42	0.79144	0.96
7250	0.11144	0.00094	0.01748	0.00024	85.758	0.088	0.53	0.20	0.08	0.32	0.97038	0.70
7750	0.11189	0.00091	0.01754	0.00023	85.720	0.083	0.47	0.20	0.13	0.30	1.1150	0.37
8250	0.1125	0.0022	0.01754	0.00048	85.72	0.16	0.32	0.24	0.33	0.48	1.5210	0.0074
8750	0.1123	0.0010	0.01757	0.00026	85.704	0.094	0.42	0.23	0.14	0.35	1.0401	0.54
9250	0.1121	0.0013	0.01748	0.00036	85.74	0.12	0.34	0.26	0.23	0.41	1.0466	0.53
9750	0.1112	0.0013	0.01737	0.00034	85.79	0.12	0.41	0.33	0.10	0.49	1.2103	0.198
10250	0.1131	0.0044	0.0175	0.0012	85.71	0.29	0.05	0.43	0.65	0.45	0.66148	0.997

Отметим в этой связи, что различие в радиусах планеты в системе HD209458 для синих и красных лучей не является значимым:  $\bar{r}_p = 0.0139 \pm 0.0003$  для  $\bar{\lambda} = 3750$  (среднее значение для трех длин волн:  $\lambda = 3201, 3750, 4300 \text{\AA}$ ) и  $\bar{r}_p = 0.0138 \pm 0.0002$  для  $\lambda = 8732$  (среднее значение для  $\lambda = 7755, 8732, 9708 \text{\AA}$ ); указаны ошибки на уровне  $2\sigma$ .

Рассмотрим теперь коэффициенты потемнения диска звезды в предположении линейного закона потемнения в зависимости от длины волны. На рис.5.4, 5.5, 5.6, 5.7 приведены зависимости наблюдаемых коэффициентов потемнения  $x$  от длины

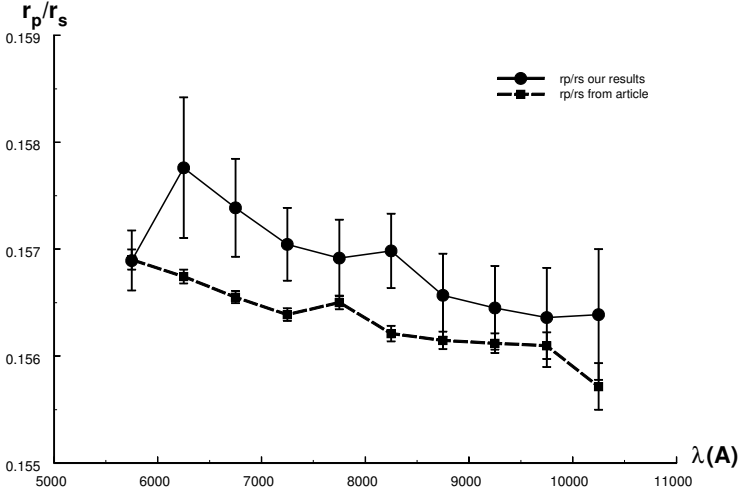


Рис 5.3: Зависимость отношения радиуса планеты к радиусу звезды от длины волны согласно результатам нашей работы (темные кружки), и согласно работе [39] (темные квадраты). В обоих случаях указаны ошибки, полученные на уровне  $1\sigma$ . В нашем случае ошибки больше ввиду того, что коэффициент потемнения к краю не фиксирован, а ищется совместно с другими параметрами задачи.

Таблица 5.11: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (правой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ .

$\lambda$ (Å)	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{est}(r_p^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{est}(i^c(^{\circ}))$	$x_1^c$	$2\sigma_{est}(x_1^c)$	$y_1^2$	$2\sigma_{est}(y_1^c)$	$\chi^2_{red}$	$\alpha_0$
5750	0.11094	0.00053	0.017531	0.000095	85.781	0.044	0.86	0.20	-0.42	0.27	3.7576	0
6250	0.1113	0.0011	0.01794	0.00016	85.681	0.078	1.13	0.44	-0.78	0.58	1.1957	0.26
6750	0.11080	0.00089	0.01765	0.00014	85.761	0.070	1.01	0.33	-0.56	0.45	1.8492	$2.6 \cdot 10^{-4}$
7250	0.11115	0.00072	0.01754	0.00014	85.772	0.060	0.84	0.25	-0.33	0.35	2.5861	$1.27 \cdot 10^{-9}$
7750	0.11109	0.00069	0.01752	0.00013	85.776	0.058	0.85	0.25	-0.38	0.35	1.3392	0.089
8250	0.11076	0.00050	0.017623	0.000080	85.778	0.040	0.99	0.20	-0.61	0.27	0.99821	0.65
8750	0.11116	0.00069	0.01753	0.00012	85.761	0.056	0.85	0.27	-0.46	0.37	1.3138	0.11
9250	0.11083	0.00089	0.01731	0.00018	85.839	0.079	0.63	0.28	-0.16	0.40	1.1495	0.338
9750	0.1120	0.0024	0.01735	0.00061	85.78	0.21	0.31	0.44	0.26	0.73	1.5716	0.0089
10250	0.1124	0.0033	0.01736	0.00076	85.74	0.27	0.26	0.48	0.33	0.87	0.88100	0.86



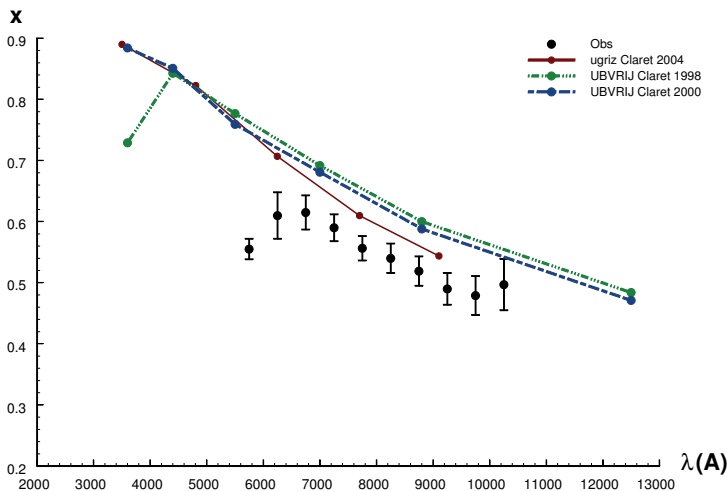


Рис 5.4: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 189733 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны  $\lambda$ . Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

волны  $\lambda$ . Здесь же даны теоретические зависимости коэффициентов потемнения в предположении линейного закона от  $\lambda$ , приведенные в работах Кларе [13, 44] для фотометрических систем ugriz и UBVRIJ. Видно, что наблюдаемая зависимость  $x(\lambda)$  качественно согласуется с теоретической: наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  в среднем убывают с увеличением длины волны. Однако, наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  систематически меньше по сравнению с теоретическими. Этот вывод качественно согласуется с результатами, полученными для системы HD209458 [7]. Однако, ход наблюдаемой функции  $x(\lambda)$  отличается от зависимости  $x(\lambda)$ , полученной для системы HD209458. Если в случае системы HD209458 различие между наблюдаемыми и теоретическими значениями  $x(\lambda)$  монотонно нарастает с увеличением  $\lambda$ , то в случае системы HD189733 это различие максимально для коротких длин волн и затем оно убывает в сторону больших длин волн. Как следует из рис.5.4 и рис.5.5,

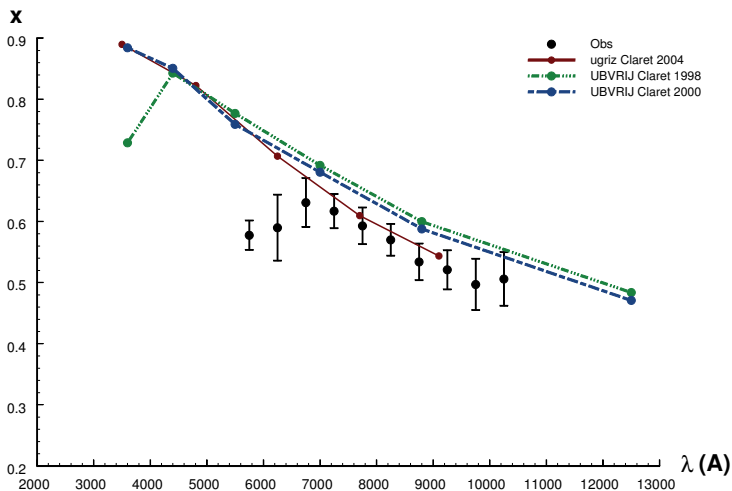


Рис 5.5: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 189733 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны  $\lambda$ . Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJ приведены из работ [13, 43, 44].

результаты интерпретации отдельно левой и правой части кривой блеска системы HD189733, несмотря на систематический сдвиг по оси ординат этих кривых блеска, согласуются между собой. Таким образом, можно сделать вывод о том, что наши результаты по анализу потемнения звезды к краю устойчивы по отношению к влиянию систематических ошибок в кривой блеска в системе HD189733.

### Интерпретация кривых блеска в рамках квадратичного закона потемнения

Результаты этой интерпретации приведены в табл.5.10 – 5.16. В табл.5.10 – 5.12 даны результаты, полученные в рамках метода дифференциальных поправок. Здесь приведены центральные значения параметров  $r_p$ ,  $r_s$ ,  $i$ ,  $x_1$ ,  $y_1$  и их ошибки на уровне  $2\sigma$  (уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ ). Также в табл.5.10 – 5.12, приведены

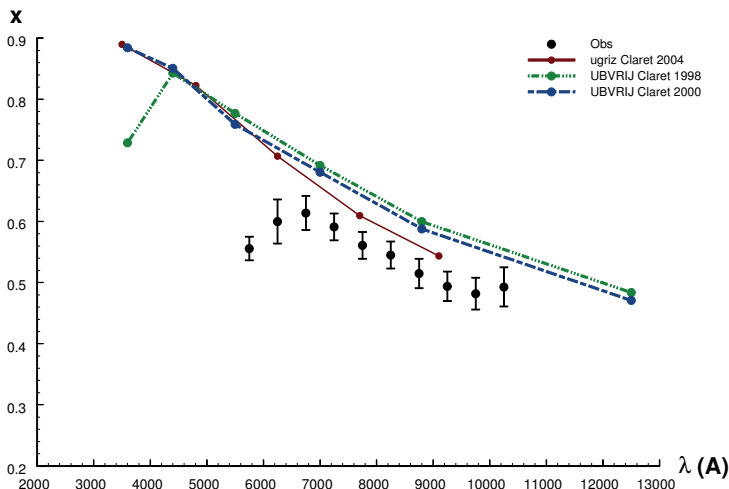


Рис 5.6: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 189733 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны  $\lambda$ . Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

значения  $\chi_{red}^2$  и  $\alpha_0$ . В случае интерпретации левой и правой ветвей кривых блеска (табл.5.10 и табл.5.11 соответственно) значения приведенного хи-квадрат  $\chi_{red}^2$  и критического уровня значимости  $\alpha_0$  для некоторых длин волн  $\chi_{red}^2 < 1$  и  $\alpha_0 > 0.5$ , что свидетельствует о скоррелированности наблюдаемых значений блеска и наличии в наблюдательных данных систематических ошибок. В случае интерпретации всей кривой блеска (табл.5.12) для большинства длин волн наша модель оказывается "плохой" и отвергается на весьма низком уровне значимости. В случае кривой блеска  $\lambda = 6250\text{\AA}$  и  $\lambda = 10250\text{\AA}$  величины  $\chi_{red}^2 \leq 1$  и  $\alpha_0 > 0.5$ , что свидетельствует о сильной скоррелированности наблюдательных точек. Все перечисленные обстоятельства вынуждают нас и в случае модели с квадратичным законом потемнения брать в качестве оценки ошибок искомых параметров величину  $2\sigma_{est}$ , а не  $\sigma_{est}$ .

В табл.5.13, 5.15, 5.16 приведены результаты интерпретации кривой блеска

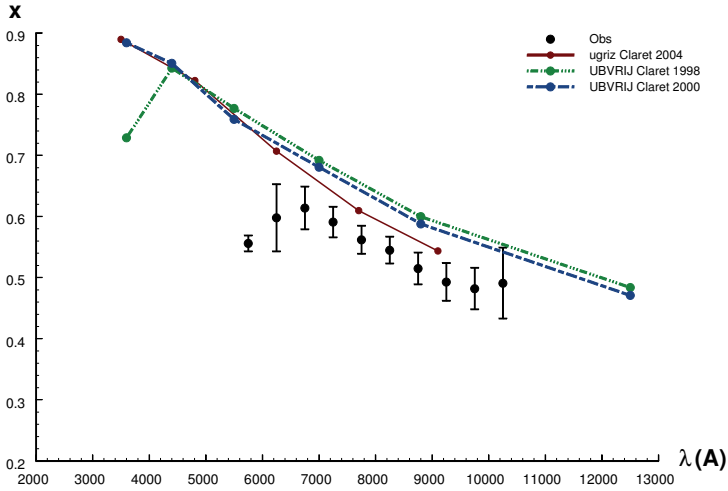


Рис 5.7: Зависимость коэффициента потемнения к краю  $x$  звезды HD 189733 в предположении линейного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJI приведены из работ [13, 43, 44].

HD189733 в рамках модели с квадратичным законом потемнения; при этом ошибки параметров оценены методом доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . В табл. 5.14 даны результаты интерпретации левой ветви кривых блеска в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибки параметров получены в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_M$  (уровень доверия  $\gamma = 0.955$ )

Таблица 5.12: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (правой и левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . В двух последних столбцах приведены значения приведенного хи-квадрат и соответствующего критического уровня значимости  $\alpha_0$ .

$\lambda(\text{Å})$	$r_s^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_s^c)$	$r_p^c$	$2\sigma_{\text{est}}(r_p^c)$	$i^c(^{\circ})$	$2\sigma_{\text{est}}(i^c(^{\circ}))$	$x_1^c$	$2\sigma_{\text{est}}(x_1^c)$	$y_1^c$	$2\sigma_{\text{est}}(y_1^c)$	$\chi_{\text{red}}^2$	$\alpha_0$
5750	0.11210	0.00067	0.01760	0.00015	85.705	0.058	0.57	0.18	-0.02	0.27	5.5682	0
6250	0.11228	0.00094	0.01792	0.00017	85.637	0.072	0.85	0.33	-0.36	0.45	0.99780	0.608
6750	0.11183	0.00086	0.01758	0.00018	85.697	0.072	0.72	0.26	-0.15	0.37	1.5358	0.00013
7250	0.11156	0.00071	0.01756	0.00015	85.737	0.061	0.66	0.20	-0.10	0.29	1.9376	$8 \cdot 10^{-10}$
7750	0.11180	0.00072	0.01759	0.00015	85.716	0.061	0.63	0.21	-0.09	0.30	2.0992	$2.5 \cdot 10^{-12}$
8250	0.11201	0.00069	0.01764	0.00015	85.712	0.058	0.61	0.20	-0.10	0.29	2.2615	$5 \cdot 10^{-15}$
8750	0.11216	0.00077	0.01761	0.00016	85.695	0.065	0.58	0.24	-0.10	0.34	2.0344	$2.7 \cdot 10^{-11}$
9250	0.11174	0.00090	0.01743	0.00022	85.766	0.084	0.43	0.23	0.09	0.34	1.4995	$3 \cdot 10^{-4}$
9750	0.11105	0.00091	0.01736	0.00021	85.804	0.083	0.47	0.25	0.01	0.37	1.3637	0.0063
10250	0.1129	0.0023	0.01733	0.00073	85.74	0.18	0.00	0.35	0.72	0.38	0.77561	0.98971

Таблица 5.13: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{Å})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11212	0.00067	0.01754	0.00016	85.722°	0.061°	0.43	0.18	0.17	0.27
6750	0.1123	0.0020	0.01757	0.00047	85.71°	0.18°	0.51	0.48	0.13	0.73
7250	0.1116	0.0013	0.01747	0.00031	85.76°	0.12°	0.51	0.32	0.07	0.49
7750	0.1120	0.0013	0.01752	0.00028	85.72°	0.11°	0.45	0.32	0.08	0.48
8250	0.1126	0.0012	0.01754	0.00029	85.72°	0.12°	0.32	0.34	0.29	0.51
8750	0.1125	0.0014	0.01758	0.00030	85.69°	0.12°	0.41	0.37	0.09	0.54
9250	0.1122	0.0015	0.01745	0.00038	85.76°	0.15°	0.32	0.45	0.20	0.67
9750	0.1112	0.0018	0.01736	0.00039	85.80°	0.16°	0.43	0.39	0.13	0.62

Таблица 5.14: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{Å})$	$r_s$	$\Delta_M(r_s)$	$r_p$	$\Delta_M(r_p)$	$i$	$\Delta_M(i)$	$x_1$	$\Delta_M(x_1)$	$y_1$	$\Delta_M(y_1)$
6750	0.1150	0.0066	0.01785	0.00051	85.77°	0.41°	1.27	0.81	1.3	1.3
7250	0.1115	0.0022	0.01758	0.00039	85.77°	0.21°	0.63	0.40	0.23	0.62
7750	0.1118	0.0014	0.01756	0.00030	85.71°	0.12°	0.47	0.27	0.13	0.42
8750	0.1123	0.0018	0.01766	0.00036	85.69°	0.17°	0.51	0.36	0.28	0.55
9250	0.1121	0.0022	0.01762	0.00036	85.76°	0.22°	0.42	0.35	0.36	0.56
9750	0.1109	0.0018	0.01741	0.00040	85.77°	0.14°	0.39	0.40	0.073	0.64

Таблица 5.15: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (правой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11091	0.00070	0.01752	0.00016	85.782°	0.060°	0.87	0.18	-0.44	0.26
6250	0.1109	0.0028	0.01784	0.00064	85.73°	0.22°	1.27	0.69	-0.73	0.97
6750	0.1108	0.0019	0.01758	0.00043	85.77°	0.16°	1.02	0.44	-0.60	0.64
7250	0.1111	0.0014	0.01750	0.00037	85.78°	0.13°	0.85	0.37	-0.39	0.54
7750	0.1111	0.0013	0.01751	0.00030	85.78°	0.11°	0.87	0.33	-0.38	0.48
8250	0.1108	0.0012	0.01763	0.00027	85.778°	0.098°	1.01	0.29	-0.59	0.42
8750	0.1113	0.0015	0.01753	0.00032	85.76°	0.12°	0.85	0.38	-0.45	0.55
9250	0.1109	0.0016	0.01731	0.00041	85.84°	0.16°	0.66	0.45	-0.12	0.67
9750	0.1108	0.0020	0.01726	0.00043	85.85°	0.18°	0.55	0.53	-0.17	0.78

Таблица 5.16: Результаты интерпретации наблюдаемых кривых блеска (правой и левой ветви кривой блеска) из работы [39] двойной системы с экзопланетой HD 189733 в рамках квадратичного закона потемнения к краю. Ошибка параметров получена в рамках метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Уровень доверия выбран  $\gamma = 0.955$ .

$\lambda(\text{\AA})$	$r_s$	$\Delta_P(r_s)$	$r_p$	$\Delta_P(r_p)$	$i$	$\Delta_P(i)$	$x_1$	$\Delta_P(x_1)$	$y_1$	$\Delta_P(y_1)$
5750	0.11182	0.00048	0.01757	0.00011	85.724°	0.042°	0.60	0.12	-0.09	0.18
6250	0.1124	0.0021	0.01790	0.00047	85.64°	0.17°	0.88	0.53	-0.35	0.76
6750	0.1119	0.0014	0.01765	0.00031	85.71°	0.12°	0.71	0.34	-0.16	0.50
7250	0.11160	0.00095	0.01755	0.00023	85.741°	0.085°	0.65	0.24	-0.12	0.36
7750	0.11183	0.00091	0.01758	0.00019	85.718°	0.075°	0.62	0.23	-0.10	0.34
8250	0.11204	0.00085	0.01763	0.00019	85.714°	0.072°	0.61	0.22	-0.11	0.32
8750	0.11219	0.00100	0.01760	0.00021	85.697°	0.082°	0.58	0.27	-0.10	0.38
9250	0.1118	0.0011	0.01743	0.00028	85.77°	0.11	0.45	0.33	0.12	0.48
9750	0.1111	0.0013	0.01735	0.00027	85.81°	0.11	0.48	0.35	0.01	0.51

## 5.4 Зависимость от длины волны коэффициентов $x_1$ и $y_1$ в предположении квадратичного закона потемнения

На рис.5.8 – 5.13 приведена зависимость наблюдаемых значений  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  от длины волны, полученных методом дифференциальных поправок. Ошибки приведены на уровне  $2\sigma$  (уровень доверия  $\gamma = 95.5\%$ ). Здесь также даны теоретические зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные в работах [13, 44]. Видно, что наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по левой ветви кривой блеска, согласуется с теоретической зависимостью  $x_1(\lambda)$ . В то время как наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по правой ветви кривой блеска, лежит существенно

выше теоретической (рис. 5.8 и рис.5.9 соответственно). Наблюдаемая зависимость  $x_1(\lambda)$ , полученная по всей кривой блеска, в пределах ошибок определения (на уровне  $2\sigma$ ) удовлетворительно согласуется с теоретической зависимостью.

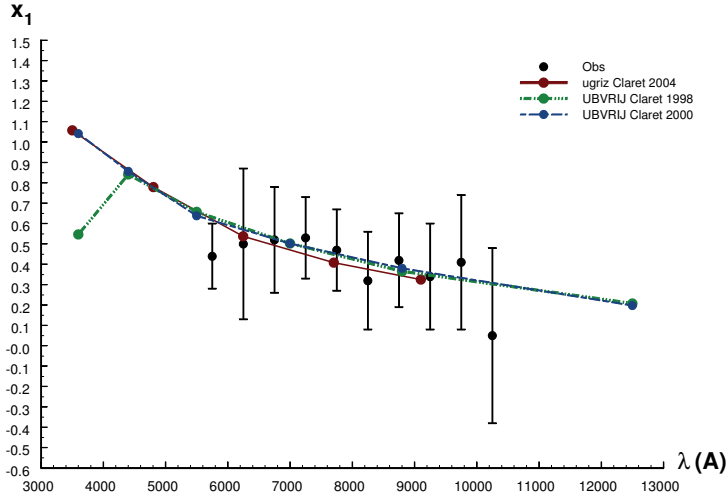


Рис 5.8: Зависимость линейного коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

Наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по левой ветви кривой блеска согласуется с теоретической зависимостью, в то время как наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по правой ветви кривой блеска, значительно отличается от теоретической и лежит существенно ниже. Наблюдаемая зависимость  $y_1(\lambda)$ , полученная по всей кривой блеска, в пределах ошибок определения (на уровне  $2\sigma$ ), удовлетворительно согласуется с теоретической зависимостью (см. рис. 5.11 - 5.13).

Подчеркнем, что если бы мы взяли ошибки параметров на уровне  $1\sigma$ , то можно было бы заключить, что наблюдаемые зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные по всей кривой блеска, не согласуются с теоретическими: наблюдаемая зависимость

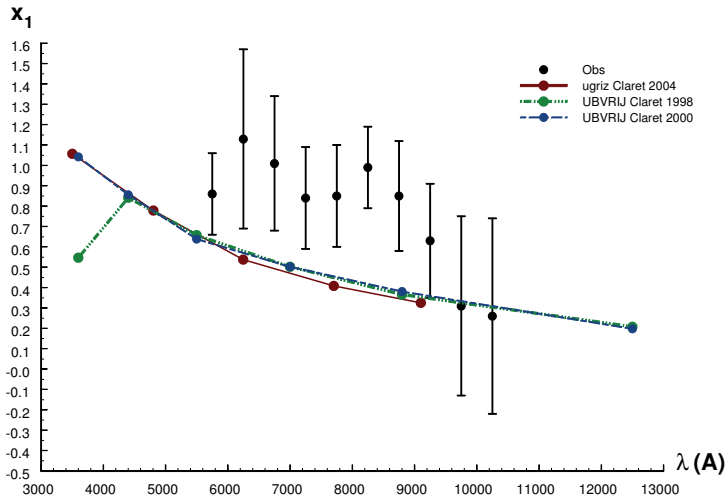


Рис 5.9: Зависимость линейного коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

$x_1(\lambda)$  лежит систематически выше теоретической, а зависимость  $y_1(\lambda)$  – ниже теоретической зависимости (см. рис.5.10 и рис.5.13). Однако, поскольку наша модель оказалась "плохой" и, кроме того, наша модель является не однопараметрической, а содержит 5 искомым параметров, мы вынуждены брать ошибки на уровне  $2\sigma$ . При таких значениях ошибок определения коэффициентов  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  указанные отличия наблюдаемых зависимостей  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$  не являются значимыми. На рис.5.14, 5.15 приведены зависимости  $x_1(\lambda)$  и  $y_1(\lambda)$ , полученные из интерпретации левой и правой ветвей кривой блеска, на которых ошибки получены методом доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ .

На рис.5.16, 5.17 приведены проекции доверительных областей в рамках статистики с законом распределения  $\chi^2_P$  и  $\chi^2_M$  на плоскости  $r_s, r_p; x_1, y_1$ . Использовалась кривая блеска  $\lambda 9500 \div 10000 \text{ \AA}$  (левая ветвь). Применялась модель с



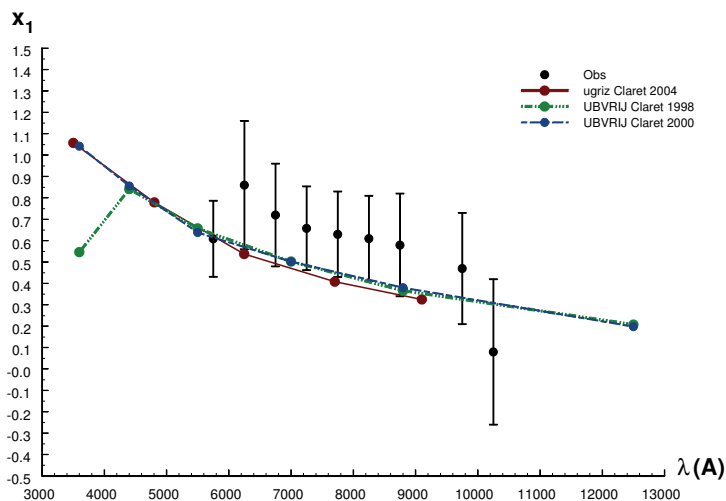


Рис 5.10: Зависимость линейного коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJI приведены из работ [13, 43, 44].

квадратичным законом потемнения.

Качественно иной вид функции  $x(\lambda)$  для системы HD189733 по сравнению с системой HD209458 может быть связан с тем, что на поверхности звезды в системе HD189733 в момент ее наблюдения имелись пятна [8, 39]. Поэтому дальнейшие наблюдения системы HD189733 в периоды ее меньшей активности, представляют большой интерес. Следует подчеркнуть, что хотя наблюдаемые зависимости  $x(\lambda)$  для систем HD189733 и HD209458 качественно различны, для обеих систем наблюдаемые значения  $x(\lambda)$  в среднем меньше теоретических. Этот вывод имеет существенное значение для проверки современных моделей тонких звездных атмосфер.

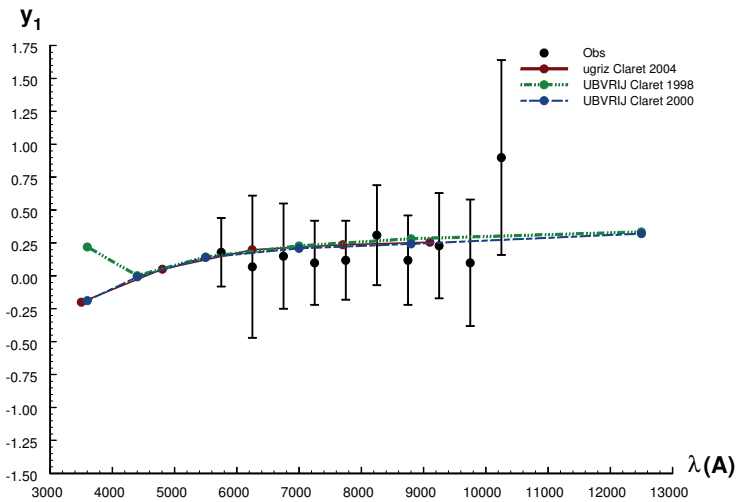


Рис 5.11: Зависимость квадратичного коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

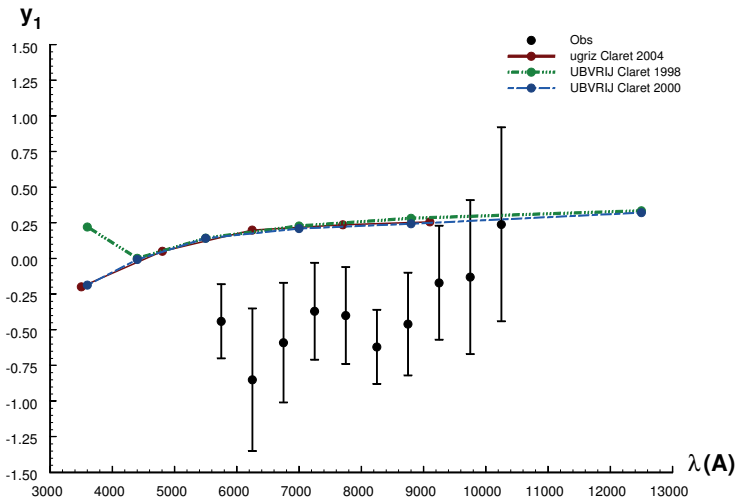


Рис 5.12: Зависимость квадратичного коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

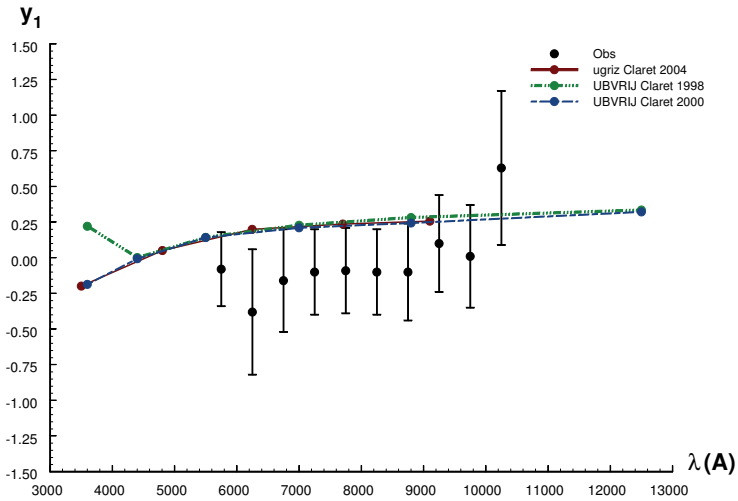


Рис 5.13: Зависимость квадратичного коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRIJ приведены из работ [13, 43, 44].

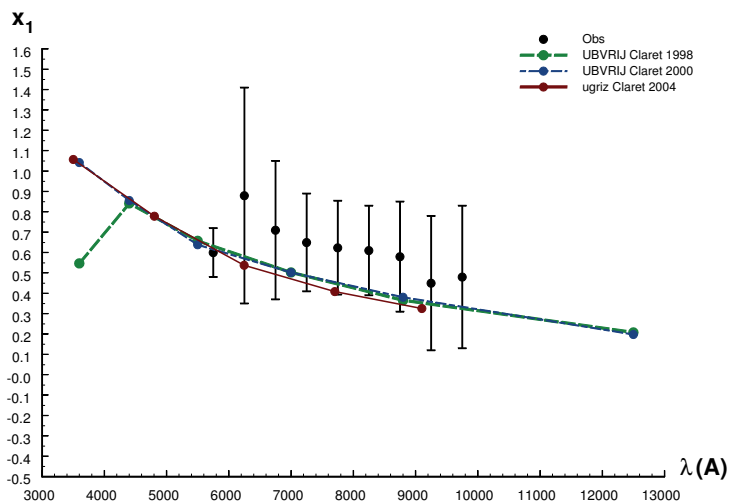


Рис 5.14: Зависимость квадратичного коэффициента потемнения к краю  $x_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVR IJ приведены из работ [13, 43, 44].

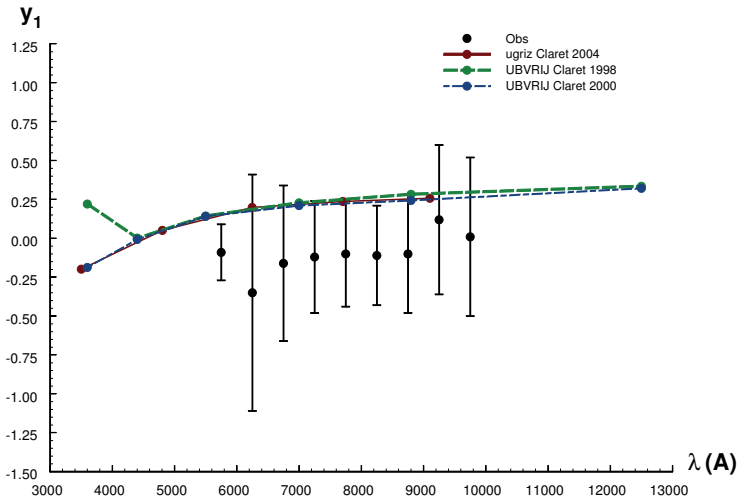


Рис 5.15: Зависимость квадратичного коэффициента потемнения к краю  $y_1$  звезды HD 189733 в предположении квадратичного закона потемнения к краю от длины волны. Значения коэффициента потемнения к краю получены на основе анализа кривых блеска (левой и правой ветви) из работы [39]. Ошибки коэффициентов потемнения к краю получены на основе метода доверительных областей с использованием статистики с законом распределения  $\chi^2_P$ . Ошибка приведена на уровне доверия  $\gamma = 0.955$ . Теоретические значения коэффициентов потемнения к краю в фотометрических системах ugriz и UBVRJI приведены из работ [13, 43, 44].

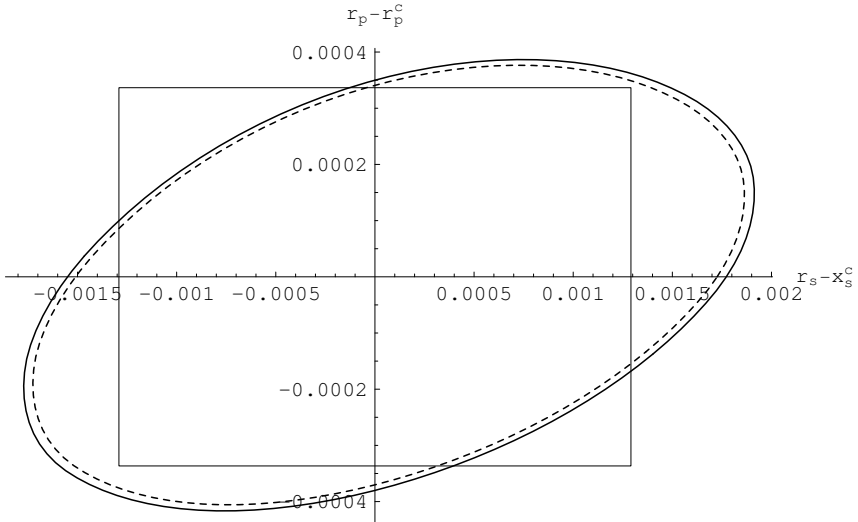


Рис 5.16: Проекция доверительной области в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  и  $\chi_M^2$  на плоскость параметров  $r_s, r_p$  в предположении квадратичного закона потемнения к краю. Уровень доверия  $\gamma = 0.955$ , для кривой блеска в диапазоне длин волн  $9500 - 10000 \text{ \AA}$  (левая ветвь). Пунктирная линия – доверительная область, построенная с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Сплошная линия – доверительная область, построенная с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ . Стороны прямоугольника соответствуют интервалам ошибок, на уровне  $2\sigma$ , полученным в рамках метода дифференциальных поправок.

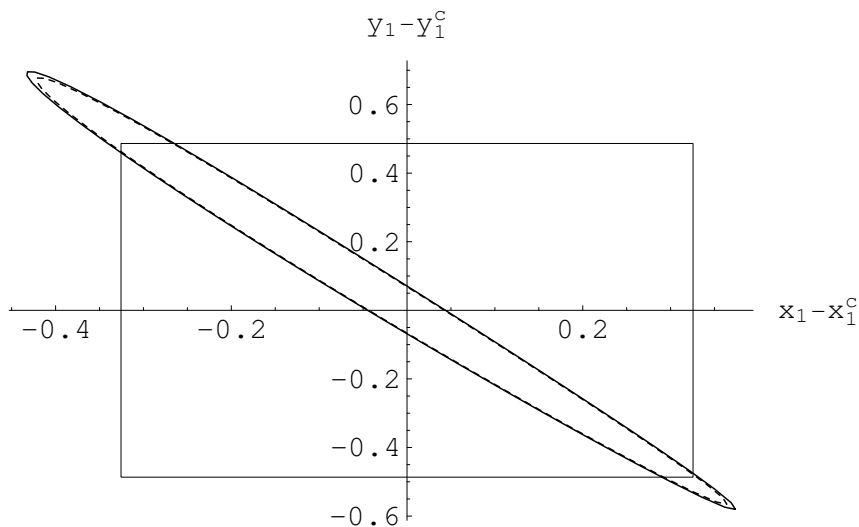


Рис 5.17: Проекция доверительной области в рамках статистики с законом распределения  $\chi_P^2$  и  $\chi_M^2$  на плоскость параметров  $x_1, y_1$  в предположении квадратичного закона потемнения к краю. Уровень доверия  $\gamma = 0.955$ , для кривой блеска в диапазоне длин волн  $9500 - 10000 \text{ \AA}$ . Пунктирная линия – доверительная область, построенная с использованием статистики с законом распределения  $\chi_P^2$ . Сплошная линия – доверительная область, построенная с использованием статистики с законом распределения  $\chi_M^2$ . Стороны прямоугольника соответствуют интервалам ошибок, на уровне  $2\sigma$ , полученным в рамках метода дифференциальных поправок.



## Заключение

Окончательно подводя итоги скажем, что в диссертации представлен статистический подход к интерпретации кривых блеска двойных звездных систем с экзопланетами. Интерпретация выполнялась в рамках линейного и квадратичного законов потемнения к краю. Отметим ещё раз наиболее важные с физической точки зрения результаты. Так, на рис. 3.6 и 5.4 представлены зависимости коэффициента потемнения к краю от длины волны в предположении линейного закона потемнения для систем HD 209458 и HD 189733 соответственно. Видно, что расхождение между наблюдаемыми значениями коэффициента потемнения к краю и полученными из теории тонких атмосфер значительно. Для обеих систем наблюдаемые значения коэффициента потемнения к краю систематически меньше теоретических. При этом в случае с системой HD 209458 расхождение наблюдаемых и теоретических значений коэффициента потемнения к краю возрастает с ростом длины волны, в то время как в случае системы HD 189733 это расхождение максимально для наименьших длин волн. В случае квадратичного закона потемнения к краю данное расхождение уменьшается.

В таблице 5.17 приведены теоретические и наблюдаемые коэффициенты потемнения к краю для видимого диапазона длин волн, полученные в предположении линейного и квадратичного закона для всех пяти рассмотренных в диссертационном исследовании систем. В последнем столбце приведены центральные длины волн, соответствующие наблюдаемым кривым блеска. Следует отметить, что большинство из приведённых линейных коэффициентов потемнения к краю меньше соответствующих теоретических коэффициентов. Это различие сохраняется при переходе от линейного к квадратичному закону потемнения диска звезды к краю. Объяснение указанного различия представляет собой отдельную физическую задачу.

Важным результатом является подтверждение уменьшения радиуса экзопланеты с увеличением длины волны (см. рис 5.3). Данная зависимость свидетельствует о релеевском рассеянии излучения звезды в атмосфере экзопланеты.

Таблица 5.17: Эмпирические и теоретические значения коэффициентов потемнения к краю. Ошибки получены в рамках метода дифференциальных поправок. Ошибка приведена на уровне  $2\sigma$ . Для системы HD 189733 приведены результаты интерпретации по левой ветви кривой блеска.  $x$  – коэффициент для модели с линейным законом потемнения к краю.  $x_1$  и  $y_1$  – соответственно линейный и квадратичный коэффициенты в предположении квадратичного закона потемнения к краю. Индексом "teor" обозначены соответствующие теоретические коэффициенты потемнения к краю.

Название системы	$x$	$x_{teor}$	$x_1$	$x_{1teor}$	$y_1$	$y_{1teor}$	$\lambda(\text{\AA})$
HD 209458	$0.437 \pm 0.013$	$\sim 0.58$	$0.307 \pm 0.075$	$\sim 0.49$	$0.21 \pm 0.12$	$\sim 0.21$	6779
Kepler-5b	$0.482 \pm 0.032$	0.587	$-0.07 \pm 0.36$	0.279	$0.75 \pm 0.52$	0.363	6550
Kepler-6b	$0.635 \pm 0.026$	0.632	$0.38 \pm 0.24$	0.366	$0.38 \pm 0.38$	0.314	6550
Kepler-7b	$0.538 \pm 0.026$	0.609	$0.23 \pm 0.32$	0.316	$0.44 \pm 0.46$	0.344	6550
HD 189733	$0.615 \pm 0.028$	$\sim 0.67$	$0.52 \pm 0.26$	$\sim 0.49$	$0.14 \pm 0.42$	$\sim 0.21$	6750

# Литература

- [1] T. M. Brown, D. Charbonneau, R.L. Gilliland et al., *Astrophys.J.* **552**, 699 (2001).
- [2] H. A. Knutson, D. Charbonneau, R. W. Noyes, T. M. Brown, R. L. Gilliland, *Astrophys.J.* **655**, 564 (2007).
- [3] I.A.G. Shellen, E.J.W. de Mooij, S.Albrecht, *Nature.* **459**, 543 (2009)
- [4] Eds. C. Bertout, T. Forveille, N.Langer, S.Shore, *Astron & Astrophys* **506**, 1 (2009).
- [5] D.G. Koch, et al., *Astrophys.J.* **713**, L79 (2010).
- [6] Interactive Extra-solar Planets Catalog, <http://exoplanet.eu/catalog.php>
- [7] J. Southworth, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **386**, 1644 (2008).
- [8] F. Pont, R.L. Gilliland, C. Moutou, *Astron & Astrophys* **476**, 1347 (2007).
- [9] D.G. Koch, W.J. Borucki, J.F.Rowe et al., *Astrophys.J.* **713**, 131 (2010).
- [10] E.W. Dunham, W.J. Borucki, D.G. Koch et al., *Astrophys.J.* **713**, L136 (2010).
- [11] D.W. Latham, W.J. Borucki, D.G. Koch et al., *Astrophys.J.* **713**, L140 (2010).
- [12] Черепашук А.М., *Астрон. журн.* **70**, 1157. (1993)
- [13] A. Claret, *Astron & Astrophys* **428**, 1001 (2004).
- [14] Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. // *Некорректные задачи астрофизики*, М., Наука, 1985.
- [15] Wyse A.B. // *Licks Obs. Bull.* 1939 V.19, P.17.
- [16] B.C. Carlson // *arXiv: math.CA/9409227 v1*
- [17] Штиголев Б.М. // *Математическая обработка наблюдений* (М.: Физматгиз) 1962.
- [18] Уилкс С. // *Математическая статистика*. (М.: Наука) 1967.
- [19] Kron G.E. // *Astrophys.J.* 1942 V.96 P.173.
- [20] Гончарский А.В., Романов С.Ю., Черепашук А.М., 1991, *Конечнопараметрические обратные задачи астрофизики*, М., МГУ.

- [21] Kitamura M. // 1964 Adv. Astr. Ap. V.3. P.27.
- [22] Budding E. // 1973 Ap. Spase. Sci. V.22. P.87.
- [23] Kurutac V. // 1978 Ap. Spase. Sci. V.57. P.71.
- [24] Mezzetti M., Predolin F., Giuricin G., Mardirossian F.  
1980 Astron. Astrophys. Suppl. Ser. V.42. P.15.
- [25] Shulberg A.M., Murnikova V.P. // 1974 Variables Stars, V.19. P.421.
- [26] Demircan O. // 1978 Ap. Spase. Sci. V.56. P.389.
- [27] Черепашук А.М., Гончарский А.В., Ягола А.Г. // Астрон. журн. 1967 Т.44.  
С.1239.
- [28] Lacy C.H. // 1981 Astrophys.J. V.251. P.591.
- [29] A. Gimenez, Astron & Astrophys **450**, 1231 (2006).
- [30] D.M. Popper, P.B. Etzel, Astron.J. **86**, 102 (1981).
- [31] J. Southworth, P.F.L. Maxted, B.Smalley, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **351**, 1277 (2004).
- [32] D.M. Popper, Astron.J. **89**, 132 (1984).
- [33] A. Burrows, I. Hubeny, J. Budai, W.B. Hubbard, Astrophys.J. **661**, 502 (2007).
- [34] D. Charbonneau, T.M. Brown, D.W. Latham, M. Mayor, Astrophys.J. **529**, L45 (2000).
- [35] D. Naef, M. Mayor, J.L. Beurit et al., Astron & Astrophys **414**, 351 (2004).
- [36] А.В. Тутуков, Астрон. журн. **69**, 1275 (1992).
- [37] А.В. Тутуков, Астрон. журн. **72**, 400 (1995).
- [38] Eggleton P.P., Astrophys.J. **268**, 368 (1983).
- [39] F. Pont, H. Knutson, R. L. Gilliland et al., Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **385**, 109 (2008).
- [40] F. Bouchy, S. Udry, M. Mayor et al., Astron & Astrophys **444**, 15 (2005).
- [41] И. Кудзей, Астрон. Цирукляр N 1363 (1985).
- [42] S. Kasuya, M.Honda, R. Mishima, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **411**, 1863 (2011).
- [43] A. Claret, Astron & Astrophys **335**, 647 (1998).
- [44] A. Claret, Astron & Astrophys **363**, 1081 (2000).





MoreBooks!  
publishing



# yes i want morebooks!

Покупайте Ваши книги быстро и без посредников он-лайн – в одном из самых быстрорастущих книжных он-лайн магазинов! окружающей среде благодаря технологии Печати-на-Заказ.

Покупайте Ваши книги на  
**[www.more-books.ru](http://www.more-books.ru)**

---

Buy your books fast and straightforward online - at one of world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at  
**[www.get-morebooks.com](http://www.get-morebooks.com)**



VDM Verlagsservicegesellschaft mbH

Heinrich-Böcking-Str. 6-8  
D - 66121 Saarbrücken

Telefon: +49 681 3720 174  
Telefax: +49 681 3720 1749

info@vdm-vsg.de  
www.vdm-vsg.de







