Г.Н.ДУБОШИН И НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Беркович Л.М.
Самарский государственный университет,
berk@ssu.samara.ru

<...законы движения в отдаленных областях Вселенной нам остаются совершенно неизвестными, вследствие чего рассмотрение наиболее общих форм законов и математическое исследование получающихся отсюда уравнений и свойств движений является вполне оправданным и целесообразным...>

Г.Н. Дубошин

All mathematical laws generalizing laws of Meshcherskii and Eddington–Jeans are indicated for the problem Gylden–Meshcherskii of two bodies, using the method of autonomization. For a generalized non-stationary problem of two bodies are indicated of dependence of variable masses from resistating and gravitating medium. Using the method of exact linearization, the Douboshin's and Binet's equations are linearized, at which the law of interaction is the law of the Weber. The methods of autonomization and exact linearization open a path for consideration of non-stationary problems of a celestial mechanics of a general form and of a general view.

Введение

Аналитическая небесная механика покоится на двух опорах:

1. Модельные задачи, интегрируемые точно.
2. Методы возмущений, позволяющие решать задачи, близкие к интегрируемым.

Небесная механика всегда служила полигоном для испытания новых математических методов, хотя от теоретического решения небесномеханической задачи до его практического применения порой проходит немало времени.

В данной работе речь пойдет об интегрируемых задачах, причем будут использованы ра́звитые автором методы *а*втономизации и *т*очной линеаризации [2]. Совместное использование различных методов преобразований позволило приступить к систематическому исследованию *н*естационарных и *н*елинейных задач.

Метод автономизации

Нестационарные задачи относятся к числу важнейших задач, которые выдвигает современная наука. Не подлежит сомнению, что их роль еще более возрастет, если будут ра́звиты методы их редукции к менее сложным стационарным задачам. Весьма эффективным является групповой анализ дифференциальных уравнений. Однако трудности, возникающие при практическом применении алгоритма С. Ли для нахождения точечных симметрий, побуждают к поиску альтернативных подходов. В данной работе представлен один из таких подходов – метод автономизации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) – с использованием преобразований Куммера-Лиувилля (КЛ). Хотя область его применения у́же, чем у группового анализа, однако он является не менее эффективным средством исследования нестационарных задач в тех случаях, когда он применим.

Широкий класс ОДУ, имеющий как теоретическое, так и прикладное значение, образуют *н*елинейные уравнения вида [2].

$$(NLNA)y \equiv L_2 y = F(x, y, y', y''), \ (') = d/dx, \tag{1}$$

где линейное дифференциальное выражение

$$L_2 y = y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y,$$

причем a_1, a_0 – достаточно гладкие функции.

Теорема 1.1. *Для приведения (1) к автономному виду*

$$(NLA)z \equiv M_2 z = a\Phi(z, \dot{z}(t), \ddot{z}(t)), \ a = const \tag{2}$$

где

$$M_2 z \equiv \ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z, \quad b_1, b_0 = const,$$

преобразованием КЛ

$$\begin{aligned} &y = v(x)z, \quad dt = u(x)dx, \ v, u \in C^2(I), \ I = \{x | a < x < b\}, \\ &uv \neq 0, \forall x \in I, \end{aligned} \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы нелинейная часть F могла *быть представлена в виде*

$$F(x,y,y',y'') = au^2 v\Phi\left[\tfrac{y}{v}, \tfrac{1}{v}\left(\tfrac{1}{u}D - \tfrac{v'}{vu}\right)y, \tfrac{1}{v}\left(\tfrac{1}{u}D - \tfrac{v'}{vu}\right)^2 y\right],$$
$$D = \tfrac{d}{dx}.$$

При этом (1) допускает частные решения вида

$$y = \rho v(x), \quad b_n\rho = a\Phi(\rho, 0, \ldots, 0),$$

где $u(x), v(x)$ *находятся, исходя из уравнений*

$$\frac{1}{2}\frac{u''}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{u'}{u}\right)^2 + b_0 - \frac{1}{4}b_1^2u^2 = a_0 - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1', \tag{4}$$

$$v(x) = |u(x)|^{-1/2}\exp(-1/2\int a_1dx + 1/2b_1\int udx). \tag{5}$$

При этом

$$u(x) = (AY_2^2 + BY_2Y_1 + CY_1^2)^{-1},\ b_1^2 - 4b_0 = B^2 - 4AC,$$

Back
Close

$Y_1, Y_2 = Y_1 \int Y_1^{-2} dx$ – *фундаментальная система решений линейного уравнения*

$$Y'' + A_0 Y = 0, \quad A_0 = a_0 - \frac{1}{4}a_1^2 - \frac{1}{2}a_1'.$$

Таким образом, метод автономизации можно рассматривать как конструктивную альтернативу к теории точечных симметрий С. Ли, т.к. он приводит к тем же результатам, но позволяет оперировать только с ОДУ (4) и конечным уравнением (5). Однако метод автономизации имеет и ограничения. Он дает возможность найти лишь подалгебру алгебры Ли точечных симметрий, допускаемых уравнением (1).

Нестационарная задача двух тел: законы изменения массы

Процесс эволюции звездных систем, в том числе Солнечной системы, на длительных интервалах времени должен изучаться с учетом переменности масс небесных тел. Одной из простейших является задача двух тел переменной массы – задача Гильдена-Мещерского (ГМ) [3].

Определение 2.1. Под задачей ГМ будем понимать нестационарную задачу 2 тел, уравнение относительного движения которых в плоскости орбиты имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu(t)\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \ \mathbf{r} = (x, y)^T, \ |\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6}$$

Преобразованием Нехвила (так называют в небесной механике преобразование КЛ (3))

$$\mathbf{r} = v(t)\vec{\rho}, \ d\tau = u(t)dt, \ \vec{\rho} = (\xi, \eta)^T \tag{7}$$

(6) приводится к автономному виду

$$\ddot{\vec{\rho}} \pm b_1\dot{\vec{\rho}} + b_0\vec{\rho} = -\mu_0\vec{\rho}/\rho^3, \ |\vec{\rho}| = \rho = \sqrt{\xi^2+\eta^2}, \ (') = d/d\tau. \tag{8}$$

Уравнение (6) соответствует также нестационарной кеплеровой задаче, если принять во внимание гипотезу Дирака о переменности гравитационной постоянной.

Теорема 2.1. *В задаче ГМ законы изменения массы $\mu(t)$ представляют собою решения следующих нелинейных дифференциального и интегро-дифференциального уравнений*

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + b_0\mu^5 = 0, \tag{9}$$

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} + \frac{(b_0 \pm 2b_1^2)\mu^5}{(k \pm 3b_1\int\mu^2 dt)^2} = 0, \ b_1 \neq 0, \tag{10}$$

и описываются конечными формулами

$$\mu_1(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^{\frac{1}{2}\pm\frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}(\alpha_2 t + \beta_2)^{\frac{1}{2}\mp\frac{3b_1}{2\sqrt{\delta_1}}}, \ \delta_1 > 0;$$

$$\mu_2(t) = (At^2 + Bt + C)^{-1/2}\exp\left(\pm\frac{3b_1}{\sqrt{-\delta_2}}\arctan\frac{2At+B}{\sqrt{-\delta_2}}\right), \ \delta_2 < 0;$$

$$\mu_3(t) = (\alpha t + \beta)^{-1} \exp\left(\mp\frac{3b_1}{2\alpha}\frac{1}{\alpha t + \beta}\right), \ \delta_3 = 0, \ \alpha \neq 0; \qquad (11)$$

$$\mu_4(t) = (\alpha t + \beta)^{\frac{1}{2} \pm \frac{3b_1}{2\alpha}}, \ \delta_4 = \alpha^2 > 0;$$

$$\mu_5(t) = \exp(\pm\frac{3b_1}{2}t), \ \delta_5 = 0, \ \alpha = 0.$$

Задача ГМ допускает также прямолинейные движения

$$\mathbf{r} = \mu^{-1}(t)\mathbf{R_0}, b_0 = R_0^{-3}, \ |\mathbf{R_0}| = R_0,$$

инвариантные относительно действия однопараметрической группы с генератором $X = u^{-1}\partial_t + (uv)^{-1}\dot{v}(x\partial_x + y\partial_y)$.

Замечание 2.1. Законы изменения массы (11) обобщают законы Мещерского

$\mu = (\alpha t + \beta)^{-1}$, $\mu = 1/\sqrt{\alpha t + \beta}$, $\mu = 1/\sqrt{At^2 + Bt + C}$, дифференциальный закон Эддингтона-Джинса

$$\dot{\mu} = -k\mu^{\nu}, \ -\infty < \nu < +\infty.$$

В работе [4] дан качественный анализ траекторий движения задачи ГМ при различных предположениях о переменной массе, включающих также возможность ее периодического изменения. Как показывают полученные в теореме 2.1 формулы, законы изменения массы естественных небесных тел таковы, что они не могут быть (при вещественных параметрах) ни периодическими, ни колеблющимися функциями времени.

Теорема 2.2. *Интегрирование задачи (6)-(9)-(11) сводится к интегрированию задачи (6), где μ изменяется согласно закону Эддингтона-Джинса при ограничениях на показатель*

$$\nu : \dot{\mu} = -k\mu^{\nu},\ 1 \leq \nu \leq 3.$$

Редукция к задаче ГМ . Не приуменьшая собственной важной роли задачи ГМ, основное ее предназначение автор видит в том, чтобы быть канонической формой для более реалистичных постановок нестационарной задачи двух тел. Пусть уравнение относительного движения имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \mathbf{r}/r^3 - a\dot{\mathbf{r}},\ \ \mu_0, a = const.$$

Им можно описывать стационарную задачу движения спутника в поле притяжения Земли-шара под действием сопротивления однородной атмосферы, пропорциональное скорости спутника. А уравнением

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \mathbf{r}/r^3 - 2a\dot{\mathbf{r}} - b\mathbf{r}, \ \ \mu_0, a, b = const$$

можно описывать движение спутника бесконечно малой постоянной массы вокруг неподвижного центра переменной массы, окруженного достаточно протяженной гравитирующей средой переменной плотности, которая оказывает сопротивление движению, пропорциональное скорости спутника. Астрономические аспекты последней задачи см. в [5]. В [6] указывается также на следующую задачу. Пусть неподвижный центр окружен газовой или пылевой атмосферой, имеющей сферическую структуру, с плотностью, зависящей от времени, оказывающей на движущуюся точку силу сопротивления, пропорциональную плотности атмосферы и скорости движущейся точки. При этом уравнение относительного движения имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \lambda\dot{\mathbf{r}} + \frac{4}{3}\pi\delta(t)\mathbf{r} + \mu(t)\frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Теорема 2.3. *Для того чтобы ОНЗ двух тел*

$$\ddot{\mathbf{r}} + a_1(t)\dot{\mathbf{r}} + a_0(t)\mathbf{r} = -\mu(t)\mathbf{r}/r^3, \ \ \mathbf{r} = (x, y)^T \tag{12}$$

преобразованием Нехвила (7) приводилась к задаче ГМ вида (6),(9), (10), а именно к

$$\ddot{\vec{\rho}} = -\mu_0(\tau)\vec{\rho}/\rho^3$$

, где $\mu_0(\tau)$ удовлетворяет либо уравнению вида (9), либо уравнению (10) (при $\mu \to \mu_0$, $\dot{()} \to (')$, $t \to \tau$), необходимо и достаточно, чтобы $\mu(t)$, $a_1(t)$ и $a_0(t)$ удовлетворяли уравнениям:

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} - 3a_1\dot{\mu} - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot{a}_1)\mu + b_0\mu^5\exp(6\int a_1 dt) = 0, \quad (13)$$

$$\ddot{\mu} - 2\frac{\dot{\mu}^2}{\mu} - 3a_1\dot{\mu} - (a_0 + 2a_1^2 - 2\dot{a}_1)\mu + \frac{(b_0 + 2b_1^2)\mu^5\exp(6\int a_1 dt)}{(k \pm 3b_1\int\exp(3\int a_1 dt)\mu^2 dt)^2} = 0. \quad (14)$$

О методе точной линеаризации

Различные виды точной линеаризации применялись классиками. Автором разработан метод точной линеаризации (МТЛ) для нелинейных автономных уравнений n-го порядка путем нелинейной замены зависимой и независимой переменных [7].

Теорема 3.1. *Для того чтобы уравнение*

$$y'' + f(y)y'^2 + b_1\varphi(y)y' + \psi(y) = 0, \quad (') = d/dx, \; b_1 = const, \tag{15}$$

могло быть линеаризовано преобразованием

$$y = v(y)z, \quad dt = u(y)dx, \tag{16}$$

т.е. приведено к виду

$$\ddot{z} + b_1\dot{z} + b_0 z + c = 0, \; \dot{()} = d/dt, \; b_1, \; b_0, c = const, \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде

$$y''+fy'^2+b_1\varphi y'+\varphi\exp(-\int f(y)dy)[b_0\int\varphi\exp(\int f(y)dy)dy+\frac{c}{\beta}]=0, \tag{18}$$

($\beta = const$ *– нормирующий множитель). При этом преобразование (16) примет явный вид*

$$z=\beta\int\varphi\exp(\int fdy)dy,\ dt=\varphi(y)dx,$$

а при $c=0$ *уравнение (15) допускает следующие однопараметрические семейства решений*

$$r_kx+C=\int\frac{\exp(\int fdy)dy}{\int\varphi\exp(\int fdy)dy},$$

где $r_k,\ k=1,2$ *– простые корни характеристического уравнения* $r^2+b_1r+b_0=0.$

Пример 3.1. Дан нелинейный осциллятор

$$y'' + f(y)y'^2 + a\psi(y) = 0. \tag{19}$$

Преобразованием

$$z = \sqrt{2\int \psi \exp(2\int f dy)dy}, \; dt = z^{-1}\psi \exp(\int f dy)dx$$

уравнение (19) линеаризуется в $\ddot{z}+az = 0$; имеет первые интегралы и однопараметрические семейства решений соответственно:

$$y'^2 = a^2(C \mp 2\int \psi \exp(2\int f dy)dy) \exp(-2\int f dy),$$

$$\int \frac{\exp(2\int f dy)dy}{z} = \pm\sqrt{a}x + C.$$

Уравнение Дубошина

Как известно, кеплерова задача двух тел после введения полярной системы координат приводит к следующей нелинейной системе уравнений

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{1}{r^2}, \;\; r^2\dot{\varphi} = c,$$

которая, как известно, легко интегрируется. Соответствующее решение может быть использовано в качестве первого приближения для возмущенной задачи двух тел

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r}F(t, r, \dot{r}, \ddot{r}), \tag{20}$$

где вместо закона Ньютона берется весьма общая зависимость

$$F = F(t, r, \dot{r}, \ddot{r}).$$

Конкретным примером такой зависимости может служить закон Вебера:

$$F = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma^2} + \frac{2r\ddot{r}}{\sigma^2}\right), \tag{21}$$

σ – скорость распространения действия (притяжения или отталкивания), при $\sigma = \infty$ закон Вебера совпадает с законом Ньютона.

При законе Вебера возмущенная задача (20) приводит к нелинейному уравнению

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} = -\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{\sigma^2} + \frac{2r\ddot{r}}{\sigma^2}\right). \tag{22}$$

Уравнением Г.Н. Дубошина будем называть уравнение вида

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} + F(t, r, \dot{r}, \ddot{r}) = 0. \tag{23}$$

Предположим, что оно является автономным:

$$\ddot{r} - \frac{c^2}{r^3} + F(r, \dot{r}, \ddot{r}) = 0. \tag{24}$$

Применим МТЛ к уравнению (22): Перепишем его в виде

$$\ddot r - \frac{1}{r(\sigma^2 r + 2)}\dot r^2 + \sigma^2 \frac{r - c^2}{r^2(\sigma^2 r + 2)} = 0.$$

Подстановкой

$$\rho = \frac{c^2 - r}{c^2 r}, \quad d\tau = \frac{c}{r\sqrt{r}\sqrt{\sigma^2 r + 2}} dt$$

оно приводится к линейному уравнению

$$\rho''(\tau) + \sigma^2 \rho(\tau) = 0.$$

Уравнение Бине Подстановка $r = 1/R$, $d\varphi = cR^2 dt$ приводит уравнение Дубошина (24) к уравнению Бине

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} + R = \frac{1}{c^2R^2} F(\frac{1}{R}, -c\frac{dR}{d\varphi}, -c^2R^2\frac{d^2R}{d\varphi^2}).$$

При законе Вебера уравнение Бине примет вид

$$\frac{d^2R}{d\varphi^2} + R = \frac{1}{c^2}\left[1 - \frac{c^2}{\sigma^2}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2 - 2\frac{c^2}{\sigma^2} R \frac{d^2R}{d\varphi^2}\right].$$

Подстановка

$$S = R - \frac{1}{c^2}, \quad d\tau = \frac{1}{\sqrt{2R + \sigma^2}} d\varphi$$

приводит к линейному уравнению $S''(\tau) + \sigma^2 S = 0$.

Заключение

Возможности указанного метода не ограничиваются применением к ОНЗ двух тел с законом Ньютона как законом гравитации. Открыты перспективы для исследования нестационарных задач небесной механики самого общего вида как двух, так и n тел, учитывающих не только переменность масс небесных тел, но и весьма произвольные силы взаимодействия между ними и со средой, а также обобщенных стационарных задач. На важность таких постановок задач указывал Г.Н.Дубошин (см., например, [6, 8]). Систематическое применение метода преобразований к нестационарным задачам n тел впервые было дано в совместной работе автором и Б.Е.Гельфгатом [9], а в настоящее время продолжено автором [3]. Полученные результаты могут найти, в частности, применение как в ограниченной задаче трех тел, так и при нахождении частных решений задачи трех тел.

Приложение

О гупповых свойствах задачи Мещерского – Леви-Чивиты

Одной из наиболее известных в небесной механике является нестационарная задача Мещерского – Леви-Чивиты (МЛЧ) (см., например, [3, 10]). Как известно, она описывается уравнением движения вида

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\dot{\mathbf{r}} = -\mu_0 \frac{\mathbf{r}}{r^3},\ \mu_0 = const, \tag{25}$$

где $\mathbf{r} = (x, y)$ - радиус-вектор относительного движения одной материальной точки относительно другой в плоскости орбиты, $r = |\mathbf{r}|$ — расстояние между точками.

Групповой анализ этой задачи непосредственно связан с возможностью преобразования уравнения (25) к автономному виду или к задаче Гильдена–Мещерского, что эквивалентно. Воспользовавшись результатами [3], нетрудно прийти к следующим результатам.

ТЕОРЕМА. Следующие условия эквивалентны:

1°. Уравнение (25) приводится к автономному виду

$$\bar\rho'' \pm b_1\bar\rho' + b_0\bar\rho = -\mu_0\frac{\bar\rho}{\rho^3},\ \bar\rho = (X, Y),\ b_1, b_0 = const,\ (') = \frac{d}{d\tau} \quad (26)$$

преобразованием Куммера-Лиувилля (КЛ) (Нехвила)

$$\mathbf{r} = v(t)\bar\rho, \quad d\tau = u(t)dt \quad (27)$$

где

$$\frac{1}{2}\frac{\ddot u}{u} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot u}{u}\right)^2 - \frac{1}{4}\delta u^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\dot m}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\ddot m}{m},\ \delta = b_1^2 - 4b_0, \quad (28)$$

причем $v(t)$ и $u(t)$ связаны соотношениями:

$$v = |u(t)|^{-1/2}(m(t))^{-\frac{1}{2}}\exp(\pm\frac{1}{2}b_1\int udt), \quad (29)$$

$$\ddot v + \frac{\dot m(t)}{m(t)}\dot v - b_0u^2v = 0,\ b_1 = 0, \quad (30)$$

$$v^3(t)u^2(t) = 1. \tag{31}$$

2°. Задача МЛЧ допускат однопараметрическую группу Ли, т.е. инвариантна относительно подалгебры алгебры Ли, порожденной инфинитезимальным оператором вида

$$U = \xi(t,x,y)\frac{\partial}{\partial t} + \eta(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \zeta(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{32}$$

где

$$\xi = \frac{1}{u}, \quad \eta = \frac{\dot v}{uv}x, \quad \zeta = \frac{\dot v}{uv}y. \tag{33}$$

причем задача МЛЧ допускает частные решения (прямолинейные движения)

$$\mathbf{r} = v(t)\vec{\lambda}, \quad b_0\lambda^3 + \mu_0 = 0, \quad |\vec{\lambda}| = \lambda. \tag{34}$$

3°. Функция $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot m - \frac{2}{m}\dot m^2 + (b_0/2 \pm b_1^2)m^7\Big(\pm 3b_1\int\limits_{t_0}^{t} m^3 dt + k\Big)^{-2} = 0, \tag{35}$$

где $b_1, b_0, k = const.$

4°. Задача МЛЧ (25) преобразованием КЛ

$$\mathbf{r} = \bar{\rho},\ d\tau = \frac{1}{m(t)}dt \tag{36}$$

приводится к задаче ГМ

$$\bar{\rho}'' = -\mu_0 \nu(\tau) \frac{\bar{\rho}}{\rho^3}, \tag{37}$$

где $\nu(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\nu'' - \frac{2}{\nu}\nu'^2 + \frac{1}{4}(9b_1^2 - \delta)\nu^5 (\pm 3b_1 \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \nu^2 d\tau + k)^{-2} = 0. \tag{38}$$

Пример 1. Пусть $m(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}$. Эта функция удовлетворяет уравнению (34) при $b_1 = b_0 = 0$. Соответствующее преобразование Куммера–Лиувилля, а также инфинитезимальный оператор получаются при $u(t) = (\alpha t + \beta)^{-3},\ v(t) = (\alpha t + \beta)^2$.

Back
Close

Пример 2. Пусть $m(t) = (\alpha t+\beta)^{-1/3}$. Эта функция является элементарным решением уравнения (34) при $b_1 = 0$. Соответствующее преобразование Куммера–Лиувилля, а также инфинитезимальный оператор получаются при $u(t) = (\alpha t + \beta)^{-1}$,
$v(t) = (\alpha t + \beta)^{2/3}$.

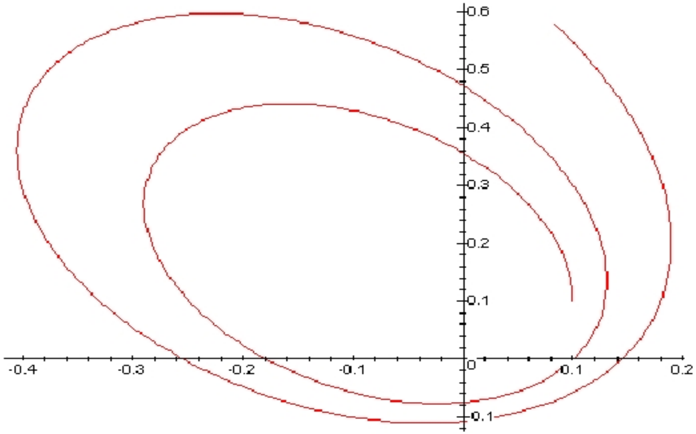

Рис. 1: Траектория изменения фазовых координат для нестационарной задачи с начальными условиями $x(0) = 0.1, y(0) = 0.1, x'(0) = 0.1, y'(0) = 10.1, \alpha = 0.1, \beta = 0.1, t \in [0, 1]$

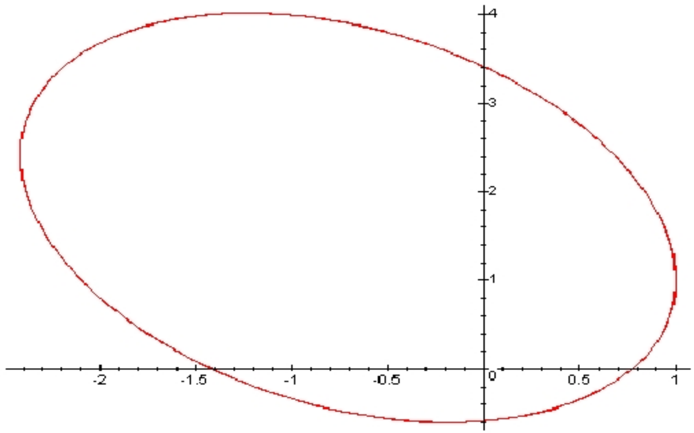

Рис. 2: Траектория изменения фазовых координат для соответствующей стационарной задачи (начальные условия $\xi(0) = 1, \eta(0) = 1, \xi'(0) = 0, \eta'(0) = 1, \tau \in [0, 50]$)

Список литературы

[1] *Berkovich L.M.* Proc. Joint Intern. Conf. "New Geometry of Nature", vol. 3, 31-37 Kazan State University, Kazan, Russia, Aug. 25-Sept. 5, 2003

[2] *Беркович Л.М.*: Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. – 464 с.

[3] *Berkovich L.M.*: Research of a non-stationary problems of celestial mechanics: transformation to an autonomous form (in "Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy", Tuken B. Omarov Editor, Nova Science Publishers, Inc. New York, 2002, pp 55-106).

[4] *Дубошин Г.Н.*: О форме траекторий в задаче о двух телах с переменными массами, Астроном. журнал, 1930, Т. 7, N 3-4, с. 153-172.

[5] *Радзиевский В.В.*: Задачи фотогравитационной небесной механики. Небесная механика излучающих тел. Докторская дис. Гос. Астрон. Обсерв., Ленинград, 1954.

[6] *Дубошин Г.Н.*: Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд. второе, переработанное, М.: Наука, 1978. – 456 с.

[7] *Беркович Л.М.* : Факторизация нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линеаризация, Доклады РАН, Т. 368, N 5, 1999, с. 504-508.

[8] *Дубошин Г.Н.*: Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, Изд. третье, дополненное, 1975. – 800 с.

[9] *Беркович Л.М., Гельфгат Б.Е.*: Исследование некоторых нестационарных задач небесной механики методом преобразований, Сб. Проблемы аналит. механики, теорий устойчивости и управления. - М.: Наука, 1975, с. 54-61.

[10] *Efroimsky M.*: One more example of the usefulness of the generalised Lagrange gauge (private communication, 2003).